問題コーナー
第 50 回
岸川 滉央

A
2011年 9月10日出題
10月10日締切
11月 7日解説

p, q は定数である $(p+q \neq 1)$. f は実数について定義され, 実数値をとる関数であり, 以下をみたす:

任意の実数 x, y について, 平面上の 3 点 $(x, f(x)), (y, f(y)), (px+qy, f(px+qy))$ は同一直線上にある.

このような f をすべて求めよ.

解説

こんにちは, 第 50 回問題コーナー担当の岸川です. 今回は正解者は 0 人, 準正解者は 1 人でした.

今回の問題はある条件を満たす 3 点が常に同一直線上にある関数を求めるというものでした. 関数問題とはいっても幾何的な考察を求められる少し変わった問題だったのではないかと思います.

直線関数以外には解が存在するはずがないと思った方が多数だと思いますが, 実は例外が存在するのです.

では解説に移ります.

◦○◯ 解答例

f が直線関数のときに成り立つのは自明である.

以後 $(x, f(x))$ を A_x と表記する (左側の元を x 座標, もう一方を y 座標と表記する).

題意は A_x, A_y, A_{px+qy} が同一直線上にあると言い換えられる (この x に s を代入し, y に t を代入するとき (s,t) を代入すると表記する).

線分の長さを考えるときは向き付きで考える (A_xA_y と表記したときは $x \leq y$ のときは非負, $x > y$ のときは正で表記する).

(1)$p = 0$ の場合

y を 0 でない定数とすると, $q \neq 1$ より, $A_y, A_q y$ は異なる定点となる. よってこの 2 点をとおる直線は一意に定まる. よって A_x はすべてこの直線上にある. x は実数全体をとるため, f は直線関数である. $q=0$ のときも同様.

(2)$p \neq q (p,q \neq 0)$ のとき

$(0,x)$ を代入すると A_0, A_x, A_{qx} が同一直線上にある.

$(x,0)$ を代入すると A_x, A_0, A_{px} が同一直線上にある.

よって, A_0, A_x, A_{px}, A_{qx} は同一直線上にある (また, 長さの比は x 座標の比によって定まる).

ある x,y について A_0, A_x, A_y が同一直線上になかったとする.

このとき, A_0, A_x, A_{px}, A_{qx} と A_0, A_y, A_{py}, A_{qy} はそれぞれ同一直線上にある.

(qx, py) を代入すると $A_{qx}, A_{py}, A_{pq(x+y)}$ が同一直線上にある.

(qy, px) を代入すると $A_{qy}, A_{px}, A_{pq(x+y)}$ が同一直線上にある.

また, $A_0, A_{px}, A_{qx}, A_{py}, A_{qy}$ はすべて異なる点である.

よってメネラウスの定理より

$$1 = \frac{A_{px}A_{qy}}{A_{qy}A_0}\frac{A_0A_{py}}{A_{qy}py}\frac{A_{qy}A_{pq(x+y)}}{A_{pq(x+y)}A_{px}} = \frac{q-p}{-q}\frac{p}{p-q}\frac{A_{qy}A_{pq(x+y)}}{A_{pq(x+y)}A_{px}}$$

$\dfrac{A_{qy}A_{pq(x+y)}}{A_{pq(x+y)}A_{px}} = \dfrac{q}{p}$ となる. よって $A_{pq(x+y)}$ の x 座標は $\dfrac{pq(x+y)}{p+q} = pq(x+y)$ となり ($p+q=0$ のときは直線 $A_{qx}A_{py}$, $A_{qy}A_{px}$ が交わらないため矛盾する), $p+q \neq 1$ より $x+y=0$. $x+y=0$ のときは $z \neq 0, x, -x$ なる z をとると上の議論より A_0, A_x, A_z, A_0, A_{-x}, A_z は同一直線上にあるため, A_0, A_x, A_{-x} は同一直線上にある. よって f は直線関数である.

(3)$p = q (p \neq 0, -1)$ のとき

ある x,y について A_0, A_x, A_y が同一直線上になかったとする.

$(x, -x)$ を代入すると A_x, A_{-x}, A_0 が同一直線上にある.

$(0,x)$ を代入すると A_0, A_x, A_{px} が同一直線上にある. この x に $-x$ を代入すると A_0, A_{-x}, A_{-px} が同一直線上にある.

よって $A_0, A_x, A_{-x}, A_{-px}$ と A_0, A_y, A_{-y}, A_{py} はそれぞれ同一直線上にある.

$(x, y-x)$ を代入すると A_x, A_{y-x}, A_{py} が同一直線上にある.

$(-y, y-x)$ を代入すると A_{-y}, A_{y-x}, A_{-px} が同一直線上にある.

また $A_0, A_x, A_{-px}, A_{-y}, A_{py}$ はすべて異なる点である.

よってメネラウスの定理より

$$1=\frac{A_{y-x}A_{py}}{A_{y-x}A_x}\frac{A_{-px}A_x}{A_{-px}A_0}\frac{A_{-y}A_0}{A_{-y}A_{py}}=\frac{py-y+x}{2x-y}\frac{x+px}{px}\frac{y}{py+y}$$

これを解いて $p=\frac{1}{2},x=y$ となるが前者は $p+q=2p\neq 1$ より, 後者は A_0,A_x,A_y が同一直線上にないことより矛盾する. よって f は直線関数である.

(4)$p=q=-1$ のとき

$f(x)=ax^3+bx+c$ のとき成り立つ (A_x,A_y,A_{-x-y} が異なる点とすると $\frac{f(x)-f(-x-y)}{x-(-x-y)}=a(x^2+xy+y^2)+b=\frac{f(y)-f(-x-y)}{y-(-x-y)}$ となるため).

逆の議論よりある f が題意をみたすとき, $g(x)=f(x)-ax^3-bx-c$ とすると g も題意をみたす.

ここで $c=f(0),a+b+c=f(1),8a+2b+c=f(2)$ となるように a,b,c をとり, それによって g を上のように定める.

$(x,g(x))$ を B_x と表記する. このとき B_x,B_y,B_{-x-y} は同一直線上にある (以後の代入はこれに対して行う). また, $g(0)=g(1)=g(2)=0$ である.

$(x,-x)$ を代入すると B_x,B_{-x},B_0 は同一直線上にある,

$(-x,-1)$ を代入すると B_{-x},B_{-1},B_{x+1} が同一直線上にある.

よって帰納的に n を整数とすると $g(n)=0$ となる.

ある a について $g(a)\neq 0$ であったとする (g が題意をみたすとき, $h(x)=-g(x)$ や $i(x)=g(-x)$ も題意をみたすため, $a,g(a)>0$ としてよい).

$n<a<n+1$ なる n をとると

(n,a) を代入すると B_n,B_a,B_{-n-a} は同一直線上にあり, $-n-a<n<a$ より $g(-n-a)<0$.

$(n+1,a)$ を代入すると B_{n+1},B_a,B_{-n-1-a} は同一直線上にあり, $-n-1-a<a<n+1$ より $g(-n-1-a)>0$.

$(-n-1-a,1)$ を代入すると B_{-n-1-a},B_1,B_{n+a} は同一直線上にあり, $a>1$ のとき $-n-1-a<1<n+a$ より $g(n+a)<0$ となる.

しかし $(-n-a,n+a)$ を代入すると B_{-n-a},B_{n+a},B_0 が同一直線上にあるため矛盾する.

$0<a<1$ のとき

$(-2,a)$ を代入すると $B_{-2},B_a,B2-a$ が同一直線上にあり, $-2<a<2-a$ よ

り $g(2-a)>0$ となるが, $2-a>1$ より矛盾する.

よって $g(x)=0$, $f(x)=ax^3+bx+c$ となる. (証明終)

感想欄より

良問だと思います. しばらく解けないのではないかと思っていたのですが, ちゃんと解けて驚きました. $p+q=1$ の場合はどうなるのでしょうか.

$p+q=1$ の場合については私も詳しくはわからないのですが, いろいろと大変な関数が存在します. 例えば, p,q が有理数のときは $f(x)+f(y)=f(x+y)$ をみたす関数は全て題意をみたすことが示せます (そしてこれには直線関数以外のものがあると言われています). 特に $(p,q)=(1,0)$ については任意の関数で成立します (2 点が一致するので).

久方ぶり (?) に投稿いたします. ついに問題コーナーも幕を閉じてしまわれるのですか…こちらに下手の横好きで投稿し続けることがかなわなくなり残念です (いえ, 本当は正解したいのですけれど修行の足りない身, 申し訳ない (–;)).

私もこのコーナーがなくなるのは残念です.

(きしかわ あきお
東京大学理科三類 1 年)