問題コーナー

第 49 回

吉田 雄紀

N

2011年 8月15日出題
9月15日締切
10月 7日解説

n を正の整数とする. 以下の 2 つの条件をみたす正の整数の列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を考える：

- $1 \leqq i \leqq n$ のとき, $a_i = i$.
- $n+1 \leqq i$ のとき, $a_i = \begin{cases} a_{i-1}+1 & (a_{i-1} \text{ と } a_{i-n} \text{ の最大公約数が } 1 \text{ のとき}) \\ a_{i-1}-1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$.

(a) n が奇数のとき, ある 2 以上の整数 k が存在して $a_k = 1$ となることを示せ.

(b) n が偶数のとき, ある整数 k が存在して $a_k = 2011^{2011}$ となることを示せ.

解 説

こんにちは, 第 49 回問題コーナー担当の吉田です.

今回の問題は, ちょっと変わった数列に関する問題でした. 早速解説にうつりましょう. なお, 応募者は全員正解していました！

解答例

(a) 数学的帰納法により, i と a_i の偶奇が一致することがわかる. したがって i が n より大きな奇数のとき, a_{i-1}, a_{i-n} はともに偶数であるため, $a_i = a_{i-1} - 1$ となる.

さて, $i > n$ のもとでの a_i の最小値を m とおき, $m = 1$ を示す. $a_t = m$ なる t を 1 つとる. このとき, 上で述べたことと m の最小性より, 帰納的に $a_{t+1} = a_{t+3} = \cdots = m+1, a_{t+2} = a_{t+4} = \cdots = m$ が示される. 特に $a_{t+n} = m+1 = a_{t+n-1}+1$ である. 一方で $\gcd(a_{t+n-1}, a_t) = \gcd(m, m) = m$ であるため $m = 1$ でなければならない.

(b)

補題. 任意の正の整数 i について $a_i < a_{i+n-1}$ が成り立つ.

補題の証明. i と a_i の偶奇が一致することより, $a_i \neq a_{i+n-1}$ が成り立つことに注意.

補題の証明は背理法による. t を, $a_t > a_{t+n-1}$ をみたす最小の正の整数とする. ここで, $a_1 = 1 < n = a_n$ より $t \geqq 2$ である.

$a_{t-1} < a_{t+n-2}$ かつ $a_t > a_{t+n-1}$, また $|a_{t-1} - a_t| = |a_{t+n-2} - a_{t+n-1}| = 1$ であることより, $a_{t+n-2} = a_t = a_{t-1} + 1$, $a_{t+n-1} = a_{t-1}$ でなくてはならないことがわかる. 特に $a_{t+n-1} = a_{t+n-2} - 1$ である. しかし一方で, $\gcd(a_{t+n-2}, a_{t-1}) = \gcd(a_{t-1}+1, a_{t-1}) = 1$ であるために $a_{t+n-1} = a_{t+n-2} + 1$ となり, 矛盾する.

補題より, 十分大きな整数 t をとると $a_t > 2011^{2011}$ となることがわかる. ここで, この数列の隣接する各項の差はつねに 1 であるため, ある t 未満の正の整数 k が存在して, $a_k = 2011^{2011}$ となることがわかる. ■

なお, 2011^{2011} という数はこの問題の本質とは何も関係がないのですが, 昨年の IMO カザフスタン大会の問題 5 を「リスペクト」してこの数を選んだのでした.

ところで, この数列に関して一つ, 成り立ちそうだけど証明できない未解決な問題があります. 興味のある方は以下の問題を考えてみてください：

> n が偶数のとき, n より大きな任意の整数 k に対して $a_k > n$ が成立することを示せ.

筆者がコンピュータを用いて調べたところ, $n \leqq 100000$ の範囲にはこの主張に反するような n は存在しませんでした. もし数学的に証明出来た方がいらっしゃいましたら, 是非ご一報ください.

感想欄より

それにしても、またまた面白い問題ですね〜こんな問題がどうやったら思いつくのか。。。とにかく、問題コーナーはしばらく安泰だと思いました。

規則性の発見がそれ程困難ではなく、解き易かったです（解答は長くなったが)。しかし、後 1 問しか解けないのか・・・。数学の難問に応募するコー

ナーが大学への数学の学コンと宿題のみになってしまいます。出来れば続けてもらいたいですね〜。地方在住の数学天才高校生にとって、このコーナーはとても意義深いと思うのですが・・・。高校生の数学の実力養成に関して重要な役割を担っていると思いますよ、このコーナーは！（最後は倒置法で）

問題コーナーの存続を希望する声もちらほら聞かれ, 胸が苦しいのですが, 残念ながら問題コーナーは第 50 回でひとまず終了とさせていただきます.

なお「数学の難問に応募するコーナー」として, **math OLYMPIAN** (編集：数学オリンピック財団) を紹介します！ math OLYMPIAN は毎年 5, 7, 10 月に数学オリンピック財団から発行される冊子で, その中の「問題コーナー」では, ここの問題コーナーと近いレベルの問題に挑戦することが出来ます. 初級コースと上級コースの 2 つがあり, それぞれ 5 題ずつ用意されています.

残念ながら答案の添削応募 (期間内に答案を送ると添削されて返ってきます) は数学オリンピックの受験申込者に限るのですが, 数オリの受験を申し込むと, その年の OLYMPIAN 3 冊は無料で手に入れることが出来ますので, 中高生の皆さんは是非ぜひ数学オリンピックにもチャレンジしてみてくださいね！ (詳細は数学オリンピック財団のホームページを参照してください. なお中学生向けには JUNIOR math OLYMPIAN があります.)

いつだったか、某数学雑誌で数学の解答はラブレターというような文章を読みました。僕の愛は伝わるでしょうか？

数学の解答がラブレターの代わりになるかどうかは分かりません (筆者は試したことがありません) が,「私が出した問題を考えてくれた」というような真摯な気持ちは受け取ってもらえるかもしれませんね. もちろん数学だけじゃなくて「日頃のアプローチ」も重要です. 頑張ってくださいね.

(よしだ ゆうき
東京大学医学部医学科 4 年)