問題コーナー
**第 48 回**
渡部 正樹

G
2011年 7月10日出題
8月10日締切
9月 7日解説

三角形 $ABC$ の重心を $G$ とすると, $AB+AC=\sqrt{3}(GB+GC)$ となった. このとき, $BC=\sqrt{3}GA$ となることを示せ.

# 解説

第 48 回の担当の渡部正樹です. 今回の問題は割ととっつきやすかったようで, 多くの方々から解答をいただきました. ありがとうございます. 以下, 解答です.

◦○◯ **解答例 1**

$AG, BG, CG$ が対辺と交わる点をそれぞれ $D, E, F$ とする. 中線定理より,

$$AC^2+CB^2=2(AF^2+FC^2)=2\Big((\frac{1}{2}AB)^2+(\frac{3}{2}GC)^2\Big)=\frac{1}{2}AB^2+\frac{9}{2}GC^2 \tag{1}$$

$$AB^2+BC^2=2(AE^2+EB^2)=2\Big((\frac{1}{2}AC)^2+(\frac{3}{2}GB)^2\Big)=\frac{1}{2}AC^2+\frac{9}{2}GB^2 \tag{2}$$

となる. 辺々引いて整理すれば, $\frac{3}{2}(AC^2-AB^2)=\frac{9}{2}(GC^2-GB^2)$ つまり $(AC-AB)(AC+AB)=3(GC-GB)(GC+GB)$ を得る. 条件 $AC+AB=\sqrt{3}(GC+GB)$ より, $AC-AB=\sqrt{3}(GC-GB)$ となる. よって, $AB=\sqrt{3}GB, AC=\sqrt{3}GC$ である.

先の (1), (2) およびそれらと同様にわかる

$$AB^2+AC^2=\frac{1}{2}BC^2+\frac{9}{2}GA^2 \tag{3}$$

を辺々足し合わせて整理すると, $\frac{3}{2}(AB^2+BC^2+CA^2)=\frac{9}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$ つまり $AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$ を得る. $AB^2=3GB^2, AC^2=3GC^2$ より $BC^2=3GA^2$, つまり $BC=\sqrt{3}GA$ となる.

次のように, 辺の長さのみによる代数的な計算での解答もいくつかありました.

**◦○◯ 解答例 2(チョコラスクさんの解答より, 一部改)**

$BC=a, CA=b, AB=c$ とおく. $AG$ と $BC$ の交点を $D$ とおくと, 中線定理より, $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$. $\therefore AD=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

$G$ は $\triangle ABC$ の重心なので, $GA=\frac{2}{3}AD$ であるから,

$$GA=\frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

同様に,

$$GB=\frac{1}{3}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2},$$

$$GC=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

$AB+AC=\sqrt{3}(GB+GC)$ より,

$$b+c=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\right).$$

$$\therefore \sqrt{3b^2}-\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=-\sqrt{3c^2}+\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$$

$$\therefore \frac{b^2+c^2-2a^2}{\sqrt{3b^2}+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}=\frac{2a^2-b^2-c^2}{\sqrt{3c^2}+\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}$$

$\therefore 2a^2-b^2-c^2=0$ または

$$\sqrt{3b^2}+\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=-\left(\sqrt{3c^2}+\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}\right)$$

後者は (左辺) $>0$, (右辺) $<0$ より成り立たないから, $2a^2=b^2+c^2$ となり,

$$BC=\sqrt{3}GA$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2$$

であるから, 題意は示された.

## 感想欄より

> ここ数回が難しすぎたので、こういう回は必要だと思います。

たしかにここ 2 回ほど難しい問題が続いていましたね. 今回の問題はとっつきやすく感じてもらえたようでなによりです.

> 計算だけでできてしまいましたが、もっと問題の本質に迫った初等的な解答が見つかったらまた送ります。

> シンプルに見えて難しいよい問題だと思います。初等幾何による解説を期待しています。

> 計算でごり押ししてしまいました・・・。他に思いつかなかったので仕方ないです。

辺の長さのあまり複雑でない式で $GA$ などの長さが表せるので, 計算もしやすかったようです. 初等幾何による解答も中線定理などを用いて長さの関係式をいろいろ導く方法なのであまり変わらないような…？期待していた方にはすみません.

(わたなべ まさき
東京大学大学院数理科学研究科 修士 1 年)