問題コーナー
第 47 回
浅野 知紘
F
2011年 6月10日出題
7月10日締切
8月15日解説

点 P は座標平面の原点 O 以外の点を動く. P の動く速度は, $OP=r$ のとき, n を $2^n \leqq r < 2^{n+1}$ なる整数とすると, 2^n である. P ははじめは点 $(1,0)$ にある. Q を O 以外の点とする. このとき, 最も短い時間で P が $(1,0)$ から Q に到達するときの軌跡は折れ線になっておらず, 曲線部分があった. このとき, Q として考えられる点全体の面積を求めよ.

ただし, 原点以外の任意の点に対し, $(1,0)$ とその点を最も短い時間で結ぶ軌跡が少なくとも 1 つ存在すること, は用いてよい.

解説

こんにちは, 第 47 回問題コーナー担当の浅野です. 今回は, 速度が領域によって変わる点の最速経路に関する問題でした. 3 人の方からの解答があり, 残念ながら正解者はいませんでした. ご応募ありがとうございました.

正解に辿(たど)りつくためには曲線部分を含む最速経路がどのような形をしているか調べる必要があります. しかし, 速度変化の境界線が円周では考えにくいので, まずは直線の場合について考えてみましょう.

また, 以下で軌跡といった場合, ある点からある点まで最も短い時間で移動する場合の軌跡のみをさすことにします.

◦○◯ 速度の変化する境界線が直線の場合

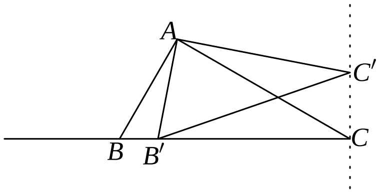
補題 1. 点 P は座標平面上を動く. P の動く速度は, P の y 座標が正のとき $\dfrac{1}{2}$, そのほかのときは 1 である. P ははじめ x 軸上の点 Q にある. A を y 座標が正の点とする. x 軸上に点 B を AB と x 軸が 60° の角をなすようにとる. B が, A から x 軸におろした垂線の足と Q の間にあるとき, Q から A への軌跡は折れ線 QBA となる.

また, x 軸上に点 B,B',B'' が, A から x 軸におろした垂線の足と Q の間にあ

るとし, B' は線分 BB'' 上 B'' と異なる位置にあるとする. このとき P が折れ線 $QB'A$ を進むのにかかる時間は, 折れ線 $QB''A$ を進むのにかかる時間より短い.

これから, x 軸と QA のなす角が 60° 以上のときは軌跡は線分 QA に一致することもわかる.

証明 点 C を $\angle CBA = 60^\circ$ かつ, $BC = 2AB$ となるように x 軸上にとる. また, x 軸上に点 B' を B と異なるようにとり, 点 C' を $\angle C'B'A = 60^\circ$ かつ, $B'C' = 2AB'$ となるように下図のように (角 $C'B'A$ と角 CBA の大きさが有向角として一致する側に) とる.



三角形 ABC と $AB'C'$ は, ともに 1 つの鋭角が 60° の直角三角形なので, 相似である. よって, $AB : AC = AB' : AC'$ であり, 上図の場合 (他の場合も同様) $\angle B'AB = 90^\circ - \angle CAB' = \angle C'AC$ より, 三角形 ABB' と ACC' が相似である. よって $\angle ACC' = \angle ABB'$ であり, $\angle ACB = 30^\circ$ とあわせて, CC' は x 軸に垂直であるとわかる.

また, P が x 軸に含まれる線分を移動する時にかかる時間はその長さに等しく, 線分 $B'A, BA$ を動くときにかかる時間はその線分の長さの 2 倍, つまり $C'A, CA$ の長さに等しい. $B'C < B'C'$ より, P の初期位置を Q とすると, x 軸と QA のなす角が 60° 未満のときの軌跡は折れ線 QBA に一致する.

後半の主張を示すためには, B'' に対し同様に C'' をとり折れ線 $QB'C'$ の長さが折れ線 $QB''C''$ の長さより短いことを示せばよい. B'' が B に対し Q と異なる側にあるときは, $B''C'' > B''C'$ と三角不等式から容易に従う. B'' が B に対し Q と異なる側にあるときは, 2 直線 $B'C', B''C''$ の傾きの絶対値をみて, $B''C''$ の傾きの絶対値の方が大きい ($CC' < \sqrt{3}CB', C'C'' = \sqrt{3}B'B''$ が相似の議論からわかり, この 2 式から確かめられる) ことからわかる. ■

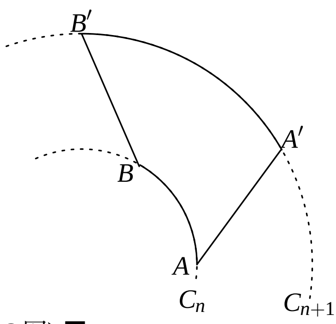
では, 境界が円周の場合の考察に入っていきましょう. まず曲線部分を含む軌跡に対し, その曲線部分が都合のよい円周上にあると考えてよいことを示します.

◦○○ **曲線部分を別の円周上に**

補題 2. 以下, 整数 n に対し C_n で原点を中心とした半径 2^n の円を表すことにする. また, 以下, 円, 円弧といった場合にはこれらの円およびその円弧のみをさすことにする.

平面内の 2 点を固定する. その 2 点を結ぶ軌跡は線分と幾つかの円弧からなるが, この軌跡が曲線部分を含み, ある整数 n について C_n と共有点をもっていたとする. このとき, その 2 点を結ぶ軌跡で C_n 上に曲線部分をもち, 線分部分が各円となす角度 (共有点での円の接線となす角度) がもとの軌跡と同じ軌跡が存在する.

証明 軌跡が円 C_n, C_m と共有点をもつとき, 円 C_n 上に曲線部分を持つ軌跡から円 C_m 上に曲線部分をもち条件を満たす軌跡をつくる. はじめの軌跡は円 C_n の弧 $\overset{\frown}{AB}$ を含んだとし, 軌跡を B から A と反対方向に辿ると C_m 上の点 B' に到達するとする. このとき, その B から B' までの軌跡を, B が A に対応するように, 原点中心に回転させる. このとき, B' に対応する点を A' とする. 新しい道のりを, A と B' の間を A から A' まで回転により作った軌跡と弧 $A'B'$ からなる曲線とし, 残りはもとの軌跡と同じものとする. すると, 弧 $\overset{\frown}{AB}$ と弧 $\overset{\frown}{A'B'}$ に対する中心角は等しく, 弧の長さの比とその上を進む速度の比が等しいので, 2 つの弧を進むのにかかる時間は等しい. 残りの部分にかかる時間も等しいので, 新しくつくった道のりは軌跡である. また, つくりかたから軌跡の線分が円となす角度を変えないことも簡単にわかる.



(上図は $m = n + 1$ のときの図) ■

ではいよいよ, (曲線部分をもつ) 軌跡の性質をみていきましょう.

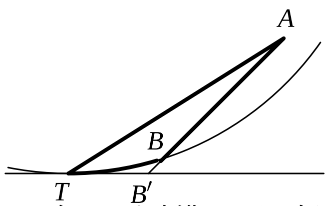
◦○○ 軌跡に含まれる線分について

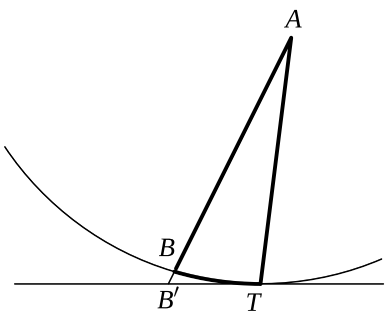
補題 3. 曲線部分を含む軌跡の線分部分はその内側に存在する最も近い円に接する直線に含まれる.

また, 自身の外側の円と交わる線分が (曲線部分をもつとは限らない) 軌跡に含まれるとき, その線分を含む直線と線分の内側に存在する最も近い円は交わる.

証明 まず, 軌跡に含まれる線分のうち円の外側から円と交わるものについては, 補題 2 (の証明) よりその線分が円と交わった点を端点にもつ円弧が軌跡に含まれるとしてよく, その線分が円と接していないならその道のりが軌跡であることに反する.

次に, 内側から円と交わる線分については, その外側の円 (との交点における接線) と 60° で交わることを示せば, その線分は内側の円に接するのでよい. 線分と円との交点を T とし, T における接線と線分のなす角が 60° でなかったとする. 線分上の端点でない 1 点を A とする.





(a) なす角が 60° 未満のとき (左図)

円の T における接線上に $\angle AB'T \leqq 120^\circ$ となる点 B' をとり, 円と線分 AB' の交点を B とする.

補題 1 より, $2TA > TB' + 2B'A$ である. よって, $2TA > TB' + 2B'A > TB' + B'B + 2BA > \overset{\frown}{TB} + 2BA$ となり, TA を直進するより, $\overset{\frown}{TB}A$ と進んだ方がかかる時間が短く, TA が軌跡に含まれることに反する.

(b) なす角が 60° を越えているとき (右図)

補題 2 (の証明) より軌跡は T を端点とする円弧を含むとしてよい. 円の T における接線上に $\angle TB'A \leqq 60^\circ$ となる点 B' をとり, 円と線分 AB' の交点

を B とする. B' および B は T の十分近くに取れるので, 弧 $\overset{\frown}{BT}$ は軌跡に含まれているとしてよい. 補題 1 より, $2B'A < B'T + 2TA$ である. これより, $2BA < B'T + 2TA - 2BB' < B'T - BB' + 2TA < \overset{\frown}{BT} + 2TA$ であり, $\overset{\frown}{BT}A$ と進むより BA を直進した方がかかる時間が短く, $\overset{\frown}{BT}A$ が軌跡に含まれることに反する.

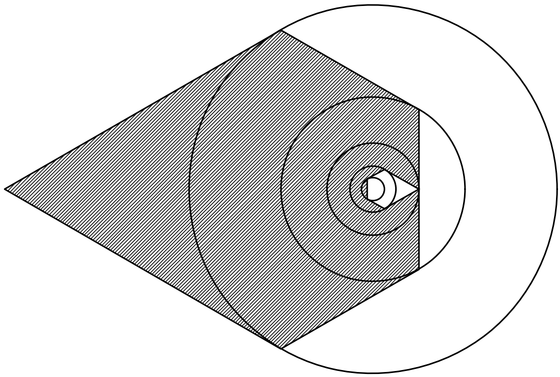
これらより, 補題の前半部分が示された.

また, 後半部分はこの証明の (a) の部分から従う. ■

それでは, 答えを求めます.

◦○◯ **領域の決定・面積計算**

主張 Q として考えられる点全体の集合は, 以下の図のようになる.



即ち, $(1,\sqrt{3}),(-2,2\sqrt{3}),(-8,0),(-2,-2\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3})$ を頂点とする大五角形の内部から, $(1,0),(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}),(-\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}),(-\frac{1}{8},-\frac{\sqrt{3}}{8}),(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})$ を頂点とする小五角形 (の内部と周) を除いた領域である.

証明 補題 2 の後半より P が $(1,0)$ から円周を通らない軌跡に沿って C_0 の内部に進む時は内部の小五角形の外側に出ることはなく, 外側に進む時は外部の大五角形の内側に入ることがない. よって Q として考えられる点がなす領域は主張の領域を含む.

Q が大五角形の外側にあるとき, 線分 OQ と大五角形の周の交点を R とする. $OQ = r > 1$ とおく. 曲線部分をもつ軌跡の線分部分は (必要なら延長して) その

内側の円に接するので, その軌跡に沿って C_n 上の点から C_{n+1} 上の点に進むには少なくとも $\sqrt{3}$ の時間がかかる. よって, r を 1 より大きい実数とすれば, $(1,0)$ を始点とする曲線部分を含む軌跡に沿って原点からの距離が r の点に到達するには少なくとも時間 $\frac{\sqrt{3}}{2^n}r+\sqrt{3}(n-1)$ だけかかることが計算によりわかる (ただし, n は $2^n \leqq r < 2^{n+1}$ なる整数). 一方, 大五角形の長くない方の周を通って $(1,0)$ から R に進み線分 RQ を進むという道のりを考えると, 上記の時間より短く Q に到達できることが (半径 OR になるまでにかかる時間が上記の評価に等しく, それを越えてからは真に上記の評価を下回る時間で原点から離れていくので) わかる. (この道のり自体は一般に軌跡ではないが) $(1,0)$ から Q までの軌跡は曲線部分を含まないことがわかる.

Q が小五角形の内側にあるとき, 半直線 OQ と小五角形の周の交点を R として, 同様の議論を行うことで, $(1,0)$ から Q までの軌跡は曲線部分を含まないことが示される. ■

大五角形は, 直線 $x=-5$ により一辺の長さ $2\sqrt{3}$ の正三角形と正六角形に分かれるので, その面積は $3\sqrt{3}\times(1+6)=21\sqrt{3}$ である. また小五角形は大五角形と相似で, その相似比は $1:8$ であるから, 面積比は $1:64$ なので, 求める領域の面積は $21\sqrt{3}\times(1-\frac{1}{64})=\mathbf{\frac{1323}{64}\sqrt{3}}$ である.

この問題は「光はかかる時間が最小 (正確には極小) になる経路を通る」という " フェルマーの原理 " から着想を得て作った問題です. フェルマーの原理自体は中学・高校の授業で扱われることは少ないかもしれませんが, 幾何光学と呼ばれる分野に属する非常に基本的な物理法則で, スネルの法則 (入射角と屈折角の関係を光の速度の比で表した公式) などもこの原理から導くことができます.

少し話を拡げ過ぎている気もしますが, このような原理は幾何光学以外にも存在し「物質はある量が最小 (極小) になるようにふるまう」という " 最小作用の原理 " は物理学の広範をカバーする (少なくとも量子論的なことを考えないうちは) 基本原理になっています.

感想欄より

数学的かつ厳密な議論が十分でなく、残念です。Q の存在し得る範囲は合っているように思いますが・・・。難問でした。

解答ありがとうございました. 手のつけにくい問題にしてしまったと反省しています.

(あさの ともひろ
東京大学理学部数学科 3 年)