問題コーナー

第 44 回

関 典史

N

2011 年 3 月 19 日出題
4 月 19 日締切
8 月 18 日解説

a,b を正の整数とする. $\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}$ がともに有限小数 (整数も含む) となるとき, $\dfrac{1}{a}$ と $\dfrac{1}{b}$ を小数表示したときの循環節の長さが等しくなることを示せ.

解 説

解説の公開が大変遅れてしまい申し訳ございません. 今回は正解 6 人, 準正解 7 人でした. 比較的簡単な問題だったためか, 多くのご応募をいただきました. ありがとうございました.

今回の問題は分数を循環小数で表示したときの循環節の長さがどう決まるかということを題材にしました. それほど難しくはない問題だと思いますが, 本来きちんと証明すべきことを当たり前のように扱っていて不十分な答案が多く見受けられました (そういった答案は準正解としました). 「こうなっているだろう」と予想がついていてもそれを証明しないと完全な答案にはならないので注意しましょう.

それでは解答をみてみましょう.

◦○◯ 解答例（宇保良男さんの解答より（一部改））

補題 1 m,n を互いに素な正整数とする. $\dfrac{m}{n}$ が有限小数になるとき, n は $2,5$ 以外の素因数をもたない.

証明 $\dfrac{m}{n}$ が有限小数になるとき, 非負整数 k と正整数 l を用いて $\dfrac{m}{n} = \dfrac{l}{10^k}$ とおける. 左辺は既約分数であるので, n は 10^k の約数となり示された. ■

補題 2 m,n は互いに素な正整数で, n は素因数 $2,5$ をもたず, $n > 1$ とする. このとき, $\dfrac{m}{n}$ は循環小数に展開され, 循環節の長さ r は $10^r \equiv 1 \pmod{n}$ をみたす最小の正整数である.

証明

（1） r が $10^r \equiv 1 \pmod{n}$ をみたすとする．$10^r = pn+1$ とおき，また m を n で割った商を q_1，余りを q_2 とすると，$\dfrac{m}{n} = q_1 + \dfrac{q_2}{n} = q_1 + \dfrac{pq_2}{10^r - 1} = q_1 + pq_2(10^{-r} + 10^{-2r} + 10^{-3r} + \cdots)$ であり，$0 < pq_2 < pn < 10^r$ なので，$\dfrac{m}{n}$ は長さ r の循環節 (ただし，r が最小とは限らない) をもつ循環小数に展開される．

（2） $\dfrac{m}{n}$ が，長さ r の循環節をもつ循環小数に展開されるとする．このとき，$10^r \cdot \dfrac{m}{n} - \dfrac{m}{n}$ は有限小数になるため，非負整数 s と正整数 t を用いて $\dfrac{t}{10^s}$ とかける．これより $\dfrac{m}{n} = \dfrac{t}{10^s(10^r - 1)}$ となり，左辺が既約分数であることから，n は $10^s(10^r - 1)$ の約数である．n は素因数 $2, 5$ をもたないので n は $10^r - 1$ の約数となり，$10^r \equiv 1 \pmod{n}$ を得る．

$10^r \equiv 1 \pmod{n}$ をみたす最小の正整数 r と $\dfrac{m}{n}$ の最小の循環節の長さ u について，(1) より $u \leqq r$ が成り立ち，$u < r$ と仮定すると (2) より $10^u \equiv 1 \pmod{n}$ となり r の最小性に反するので，$u = r$ を得る．■

さて，問題の主張を証明する．a, b の最大公約数を d とし，$a = da'$, $b = db'$ とおく．このとき，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}$ が有限小数で a', b' が互いに素なので，補題 1 より a' は $2, 5$ 以外の素因数をもたない．また，$\dfrac{a}{b}$ についても同様にして，b' は $2, 5$ 以外の素因数をもたない．したがって，$a = 2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}e$, $b = 2^{\beta_1}5^{\beta_2}e$ とおける ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は非負整数で，e は $2, 5$ と互いに素な正整数)．よって，$\dfrac{1}{a} = \dfrac{A}{10^\alpha e}$, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{B}{10^\beta e}$ ($\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ で，A, B は $2, 5$ 以外の素因数をもたない正整数) とおける．10 のべき乗倍しても循環節の長さは変わらないので，$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}$ の循環節の長さはそれぞれ $\dfrac{A}{e}, \dfrac{B}{e}$ の循環節の長さに等しくなる．$e = 1$ の場合は主張は明らかで，$e > 1$ の場合は補題 2 よりどちらの循環節の長さも $10^r \equiv 1 \pmod{e}$ をみたす最小の正整数 r となるので，主張が従う．

私の想定解もこれと同じでした．既約分数 $\dfrac{m}{n}$ の循環小数表示における循環節の長さについてまとめておくと，

- $\dfrac{m}{n}$ が有限小数 $\iff$ n が $2,5$ 以外の素因数をもたない,
- $\dfrac{m}{n}$ が循環小数で, 循環節の長さが r である $\iff$ $n = 2^s 5^t k$ (s,t は非負整数, k は $2,5$ と互いに素な正整数) とかいたとき, $k > 1$ かつ r は $10^r \equiv 1 \pmod{k}$ をみたす最小の r である,

となります. これを示せば問題の主張は簡単に得られるわけです.

なお, $2,5$ と互いに素な k に対して $10^r \equiv 1 \pmod{k}$ をみたす正整数 r が必ず存在することは次のように証明できます (分数を小数表示すると有限小数または循環小数になることはここでは認めているので上の証明で十分ですが) :

> $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$ を k で割った余りは高々 $0, 1, \ldots, k-1$ の k 種類なので, $10^i \equiv 10^j \pmod{k}$ となる i, j ($i > j$) がとれる. このとき $10^i - 10^j = 10^j(10^{i-j} - 1)$ は k で割りきれ, k は $2,5$ と互いに素なので $10^{i-j} - 1$ は k で割りきれる.

あるいはオイラーの定理によると $10^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$ です (φ はオイラー関数). これより, $n = 2^s 5^t k$ とかけるとき $\dfrac{m}{n}$ の循環節の長さは $\varphi(k)$ の約数となることもわかります.

また, $\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}$ が有限小数であるという条件から上の証明中の $a = 2^{\alpha_1} 5^{\alpha_2} e$, $b = 2^{\beta_1} 5^{\beta_2} e$ という表示を得たあと, 循環小数を 2 倍または 5 倍しても循環節の長さが変わらないということを示す, という方針で解いていた人もいました (この証明が不十分な答案が多かったのですが).

循環小数の循環節の長さという割と身近な話題から出題してみましたがいかがだったでしょうか. このような身近なネタを数遊びのような感覚でいろいろいじっていると面白いことがわかることがあるかもしれません.

感想欄より

> この問題を解くに当たって, 循環小数について少し勉強しました. 知ってはいたのですが, あまり厳密に性質を把握していなかったので, 色々と研究できて良かったです.

そう言っていただけるとうれしいです. 私も循環小数についていろいろいじっていて, 循環節の長さが分母の $2,5$ 以外の素因数の部分のみから決まるということを

証明し, それを使える問題が作れないかなーと思いこの問題ができました.

> もう少し拡張した性質が導けそう.

うーん拡張ですか…今考えている小数表示はもちろん 10 進法表示なわけですが, 別の n 進法表示でやっても同じことは言えます. (この問題での 2,5 というのがどう変わるでしょう?)

> 今回は比較的易しかったと思います.

そのようですね. 少し物足りなかったという方には申し訳ないですが, たくさんのご応募ありがとうございました.

(せき のりふみ
東京大学理学部数学科 3 年)