問題コーナー

第 43 回

栗林 司

G

2011年 2月 10日出題
3月 10日締切
4月 9日解説

n を 3 以上の整数とする. すべての頂点が格子点 (x 座標, y 座標がともに整数である点) であるような凸 n 角形の面積の最小値を S_n とおく.

(a) S_5 を求めよ.

(b) S_6 を求めよ.

意欲のある人は S_7, S_8 についても考えてみてください.

解 説

こんにちは, 第 43 回問題コーナー担当の栗林です. 今回は「格子点幾何」というジャンルからの出題でした. 幾何といっても普通の初等幾何とはだいぶ雰囲気が違い, 組合せ論的な側面もあったかと思います. では, 早速解答の紹介に移っていきましょう.

◦○○ **MVH さんの解答より**

すべての頂点が格子点であるような多角形のことを格子多角形とよぶことにする. まず, 格子三角形の面積は $\frac{1}{2}$ の整数倍である. それは, $(0,0)$, (a,b), (c,d) の 3 点のなす三角形の面積が $\frac{1}{2}|ad-bc|$ であることからわかる.

(a) $S_5 = \frac{5}{2}$ であることを示す. まず, $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ を頂点とする五角形は, 面積 $\frac{5}{2}$ の格子凸五角形である.

次に, 任意の格子凸五角形の面積は $\frac{5}{2}$ 以上であることを示す. 任意の格子凸五角形が内部に格子点をもつことを示せば, その点と各頂点を結んだ線分によって凸五角形は 5 つの格子三角形に分割され, それぞれの面積が $\frac{1}{2}$ 以上なので全体の面積が $\frac{5}{2}$ 以上であることがわかる. $ABCDE$ を格子凸五角形

とする. 隣接する角の和が 180° より大きくなる部分が存在する (存在しないとすると, $\angle A+\angle B \leqq 180^\circ$, $\angle C+\angle D \leqq 180^\circ$ より $\angle E \geqq 180^\circ$ となってしまい凸性に反する). 一般性を失わずに $\angle B+\angle C > 180^\circ$ とし, さらに直線 BC に関して見たとき A の高さは D の高さ以上であるとする. このとき, X を $BCDX$ が平行四辺形になるようにとれば, X は $ABCDE$ の内部にある格子点である. よって示された.

(b) $S_6 = 3$ であることを示す. $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(0,1)$ を頂点とする六角形は, 面積 3 の格子凸六角形である. また, 格子凸六角形 $ABCDEF$ は, 対角線 AC によって格子凸五角形 $ACDEF$ と格子三角形 ABC に分割される. 上の議論よりそれぞれの面積は $\frac{5}{2}$ 以上, $\frac{1}{2}$ 以上なので, 格子凸六角形の面積は $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ 以上. よって示された.

ぱっと見たところでは頂点の数が多い六角形の場合の方が難しそうに思えたかもしれませんが, 実は五角形の場合が本質でした. 解答にはさまざまな方針がありましたが, こちらの想定していた (後述する Pick の公式などの) 予備知識を必要としない解法を紹介しました.

以上で問題の解説は終わりですが, S_7, S_8 についても述べておきましょう. 沖野赳也さん, MVH さんがこの場合についても考えてくださり, 正しい答えを得ていました.

以下では, 格子点幾何の有名な定理である Pick の公式というものを使います.

◦○○ Pick の公式

格子多角形において, 面積を S, 周上 (頂点含む) の格子点の個数を b, 内部の格子点の個数を i とすると, $S = i + \frac{b}{2} - 1$ が成り立つ.

証明はここでは省略しますが, 対角線によって分割する (凸とは限らないので任意の対角線で分割できるわけではないことに注意) ことによって三角形の場合が本質であることがわかり, 三角形の場合は長方形の場合と直角三角形の場合から導かれます.

ちなみに, S_5 の場合のような議論をすることにより, Pick の公式を使わずとも S_7, S_8 を求めることも出来ます. しかし, Pick の公式はそれほど難しくない上, これを使わないと七角形の場合はかなり議論が煩雑になってしまうため, ここでは積極的に使っていくことにしました.

七角形, 八角形の場合は, $S_7 = \dfrac{13}{2}$, $S_8 = 7$ となります. 七角形の場合は $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(1,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$ を頂点とするもの, 八角形の場合はこれに更に $(2,3)$ を加えたものが実例になります. あとは下からの評価をすればよいわけですが, 七角形の場合を示すことが出来れば, 八角形の場合は七角形と三角形に分割することにより (六角形の場合と同様にして) 示されます. よって任意の格子凸七角形の面積が $\dfrac{13}{2}$ 以上であることを示すことに帰着され, Pick の公式を使うことにより, 任意の格子凸七角形が内部に少なくとも 4 個の格子点を含むことを示せばよいことがわかります.

◦○◯ 沖野赳也さんの解答より

まず, 辺上に頂点以外の格子点がない格子凸七角形に対して示せば十分であることを示す. 仮に辺上に頂点以外の格子点があった場合, その格子点と適当な頂点を結ぶことで, 凸七角形を三角形と新しい凸七角形に分割することが出来る. 新しい凸七角形 (周, 頂点含む) に含まれる格子点の数は元の凸七角形に含まれる格子点の数より少なく, これを繰り返していけばいつかは辺上に頂点以外の格子点がない七角形が得られる. よって示された.

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ を辺上に頂点以外の格子点がない格子凸七角形とする. 格子点の座標は $\mathrm{mod}\,2$ で考えると, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ の 4 種類. これらに属する頂点たちをそれぞれグループ 1, 2, 3, 4 とよぶことにする.

(i) あるグループの要素が 4 個以上の場合. そのグループ内の 4 個の頂点を A_i, A_j, A_k, A_l $(1 \leqq i < j < k < l \leqq 7)$ とすると, 凸四角形 $A_iA_jA_kA_l$ の各辺の中点は格子点であり, 辺上には頂点以外に格子点がないという仮定より, これらは凸七角形の内部にある. よって示された.

(ii) あるグループの要素の個数が 3 個の場合. そのグループの要素を A_i, A_j, A_k $(1 \leqq i < j < k \leqq 7)$ とする. 他の 3 つのグループの要素の個数の和は $7-3=4$ 個だから鳩ノ巣原理より, あるグループの要素の個数は 2 個以上. このグループの内の 2 つの頂点を A_m, A_n $(1 \leqq m < n \leqq 7)$ とする. 三角形

$A_iA_jA_k$ の各辺の中点は格子点 (仮定より凸七角形の内部にある) であり, それら 3 点の内,

(ii-1) 同グループの 2 点が存在する場合. その 2 点を結んだ線分の中点を合わせて 4 個の格子点が得られて, 示せる.

(ii-2) 同グループの 2 点が存在しない場合.

(ii-2-1) 3 点の内に A_m, A_n と同グループの点 M が存在するとき. 3 点の内, 残りを I, J とする. MA_m, MA_n の中点の内, I, J と異なる点があれば, それと M, I, J が求める 4 個の格子点である. MA_m, MA_n の中点の内, I, J と異なる点がなければ, A_mA_n の中点は M, I, J と異なる格子点である. これと M, I, J が求める 4 個の格子点である.

(ii-2-2) 3 点の内に A_m, A_n と同グループの点が存在しないとき. 3 点は, A_m, A_n の属するグループ以外の 3 つのグループに 1 点ずつ属している. つまり, A_i, A_j, A_k と同グループの点 N が存在し, NA_i の中点は 3 点とは異なるので, 3 点にそれを加えたものが求める 4 個の格子点である.

(iii) 全てのグループの要素の個数が高々 2 個の場合. 一般性を失わずに, グループ 1, グループ 2, グループ 3 に属する頂点が 2 個であり, グループ 4 に属する頂点が 1 個としてよい. B_1, B_2 をグループ 1, B_3, B_4 をグループ 2, B_5, B_6 をグループ 3, B_7 をグループ 4 とする. さて, B_1B_2 の中点 M は格子点 (仮定より凸七角形の内部にある) であり, 属するグループが

(iii-1) グループ 1 or グループ 2 or グループ 3 の場合. 属するグループの要素を点 B_i, 点 B_{i+1} とすると, 点 M, 点 B_i, 点 B_{i+1} が

(iii-1-1) 同一直線上にない場合は点 M と三角形 MB_iB_{i+1} の各辺の中点の 4 点が求める格子点 (仮定より凸七角形の内部にある).

(iii-1-2) 同一直線上にある場合は点 B_i と点 B_{i+1} は点 M に関して互いに反対側にある. MB_i の中点 I, MB_{i+1} の中点 J は格子点であり, 互いに異なる.

(iii-1-2-1) 点 I, 点 J の内, 少なくとも 1 点が点 M と同グループの場合. 一般性を失う事なく点 I として良く, IM の中点は点 M, 点 I, 点 J と異なり, これと点 M, 点 I, 点 J が求める 4 個の格子点である (仮定より凸七角形の内部にある).

(iii-1-2-2) 点 I, 点 J の両者とも, 点 M と異なるグループの場合. 点 I はある点 B_j (j は i とも $i+1$ とも異なる) と同グループである. 点 B_j, 点 B_i, 点 B_{i+1} は同一直線上にないので IB_j の中点は格子点であり, 点 M, 点 I, 点 J と異なる. これと点 M, 点 I, 点 J の 4 点が求める格子点である (仮定より凸七角形の内部にある).

(iii-2) グループ 4 の場合. 点 B_7 は同グループに属する. MB_7 の中点 I は格子点であり, 点 I が

(iii-2-1) グループ 4 に属さない場合. 点 B_j, 点 B_{j+1} と同グループだとすると, 点 B_j, 点 B_{j+1} の内, 少なくとも 1 点は直線 MB_7 上にない.

(iii-2-1-1) 2 点とも直線 MB_7 上にない場合. IB_j の中点, IB_{j+1} の中点は格子点であり, 点 I, 点 M と異なる. これらと点 I, 点 M が求める 4 個の格子点である (仮定より凸七角形の内部にある).

(iii-2-1-2) 直線 MB_7 上に 1 点ある場合. 一般性を失う事なく, 点 B_j が直線 MB_7 上にないとして良い. IB_j の中点, B_jB_{j+1} の中点は格子点であり, 点 I, 点 M と異なる. これらと点 I, 点 M が求める 4 個の格子点である (仮定より凸七角形の内部にある).

(iii-2-2) グループ 4 に属する場合. IB_7 の中点, IM の中点は格子点であり, 点 I, 点 M と異なる. これらと点 I, 点 M が求める 4 個の格子点である (仮定より凸七角形の内部にある).

以上より示された.

この問題を見て, S_9 や S_{10}, さらには一般の n について S_n を求められないかと思った方も多いかもしれません. しかし, 上の解答からわかる通り, n が大きくなればなるほど膨大な場合分けが必要になることが予想されます. S_9 程度であれば時間をかけて地道に場合分けをしていくことにより求められるかも知れませんが, S_{11} ともなってしまうと厳しいでしょう. 特に一般の n に対して S_n の値を厳密に求めるのは無理なのではないかと思います. その一方で, 「かつて数学セミナーに, $\dfrac{S_n}{n^3}$ $(n \to \infty)$ の極限値が存在することが載っていたことを思い出しました」とのコメントを頂きました. 筆者はこの記事は読んだことがなく詳細についてはわかりませんが, 一般の n についてもきっちりした値はわからなくとも, かなりの精度で範

囲を絞ることは出来るようです.

感想欄より

「凸七角形の内部に少なくとも 4 個の格子点がある」の証明に苦労しました. しかし様々な知識が得られて, 良い問題だったと思います.

ありがとうございます. 出題者にとっては良い問題だったと言われるのが一番嬉しいです. 七角形の場合については今のところ見つかってる解答ではどうしても多くの場合分けをせざるを得ず, 大変になってしまいますね.

予想は立てられても示すのが難しく, 大変苦労しました. かつて数学セミナーに, $\dfrac{S_n}{n^3}$ $(n \to \infty)$ の極限値が存在することが載っていたことを思い出しました. PS. 第 43 回ではなく, 第 42 回ですね.

興味深い情報ありがとうございます. 第 42 回は 1 月に出題する予定だったのですが, こちらの不手際により出題することが出来なかったので欠番として, 今回を第 43 回とさせていただきました.

凸の一文字によって, 自明な問題が興味深い問題に化けていますね. なお, ピックの定理を前提にすれば上の証明は表記を簡略化できます.

ありがとうございます. 問題コーナーでは, Pick の公式 (定理) のような一般に知られている定理は証明せずに用いてしまって構いません.

四角形に三角形をくっつけて五角形にする　というイメージで考えた. 第 39 回の問題と少し似ている気がした. 頭の中で方針をイメージするまでは比較的簡単だったが, 文章にするととても長くなってしまった. もっと簡潔に書けたと思う. それと, 自明でない事柄を気づかぬうちに証明なしで使ってしまって

いそうで怖い.

S_7, S_8 に関しては, この方針で求める方法は思いつかなかった.

対角線で区切るという意味では第 39 回の問題と共通点がありますね. S_7 についても六角形に三角形をくっつけるという発想で解くことも一応可能ですが, 四角形と違い六角形は多くの形状が考えられるので, 場合分けがかなり複雑になってしまい大変です.

(くりばやし つかさ
東京大学大学院数理科学研究科修士課程 2 年)