問題コーナー

第 41 回

中村　勇哉

F

2010年12月10日出題
2011年 1月10日締切
2月 7日解説

漸化式 $F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n (n \geqq 1)$ で定義される数列をフィボナッチ数列という. 以下の問いにそれぞれ答えよ.

(1) 以下の条件をみたす整数の組 (a,b,c) を全て求めよ：

$F_n^3+aF_{n+1}^3+bF_{n+2}^3=cF_nF_{n+1}F_{n+2}$ をみたす正の整数 n が無限に存在する.

(2) 3 変数の整数係数多項式 $f(x,y,z)$ が次の性質をみたしているとする：

$f(F_n,F_{n+1},F_{n+2})=0$ をみたす正の整数 n が無限に存在する.

このとき, $f(F_n,F_{n+1},F_{n+2})=0$ をみたす正の整数 n 全体のなす集合は次の (i), (ii) の少なくとも一方をみたすことを示せ：

(i) 正の奇数全てを含む.

(ii) 正の偶数全てを含む.

解説

今回はフィボナッチ数をテーマとした問題でした. フィボナッチ数は様々な面白い性質をもち, 証明も色々な方法が考えられます. 今回も出題者の思惑通り, 多種多様な証明が送られてきました.

早速解説に移りたいと思います. まずは問 (1) です. 答は $(a,b,c)=(1,-1,3)$ に限ることを示します. 証明にあたり次の 2 つの補題を示しておきましょう.

補題 1. 　正の整数 n について F_n, F_{n+1} は互に素である.

証明 　正整数 a,b の最大公約数を (a,b) と書くことにすれば, 一般に $(a+b,b)=(a,b)$ が成立する (ユークリッドの互除法) .

$$(F_{n+1},F_n)=(F_n+F_{n-1},F_n)=(F_{n-1},F_n)$$

を得る. よって帰納的に $(F_{n+1},F_n)=(F_2,F_1)=1$ となる. 即ち, F_n,F_{n+1} は互に素である. ■

補題 2. 　n が正の整数を動くとき $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ は全て異なる.

証明　補題 1 から直ちに従います. ■

いよいよ, 解答例の紹介に入りたいと思います. ここでは 2 つの解答を紹介しますが, 他にもフィボナッチ数の一般項を使う方法などが送られてきました.

◦○◯ 問 (1) 解答例その 1 (漆黒さん, apple10 さんの解答より)

与えられた式を $\bmod F_{n+1}$, $\bmod F_{n+2}$ でそれぞれ見ることにより,

$$F_n^3+bF_{n+2}^3\equiv 0 \pmod{F_{n+1}},$$
$$F_n^3+aF_{n+1}^3\equiv 0 \pmod{F_{n+2}}.$$

さらに, $F_n\equiv F_{n+2} \pmod{F_{n+1}}$, $F_n\equiv -F_{n+1} \pmod{F_{n+2}}$ なので,

$$(b+1)F_{n+2}^3\equiv 0 \pmod{F_{n+1}},$$
$$(a-1)F_{n+1}^3\equiv 0 \pmod{F_{n+2}}.$$

補題 1 より F_{n+1},F_{n+2} は互いに素なので,

$$b+1\equiv 0 \pmod{F_{n+1}},$$
$$a-1\equiv 0 \pmod{F_{n+2}}.$$

であり, これが無限個の n で成立することから, $a=1$, $b=-1$ を得る.

問題文の左辺を計算すると,

$$\begin{aligned}F_n^3+F_{n+1}^3-F_{n+2}^3&=F_n^3+F_{n+1}^3-(F_n+F_{n+1})^3\\&=-3F_nF_{n+1}(F_n+F_{n+1})\\&=-3F_nF_{n+1}F_{n+2}.\end{aligned}$$

これが右辺と無限個の n で一致することから, $c=-3$ に限る. また, $(a,b,c)=(1,-1,-3)$ のとき全ての n について問題文の式が成り立つことは上の変形から明らかである.

◦○◯ 問 (1) 解答例その 2 (dsk さん, 劉霊輝さんの解答より)

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ を用いて問題文の式から F_{n+2} を消去すると,

$$(a+b)F_{n+1}^3+(3b-c)F_{n+1}^2F_n+(3b-c)F_{n+1}F_n^2+(1+b)F_n^3=0$$

となる. $\varphi_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ とおけば, 上式を F_n^3 で割ることで,

$$(a+b)\varphi_n^3+(3b-c)\varphi_n^2+(3b-c)\varphi_n+1+b=0$$

を得る. これが無限個の n で成立することと補題 2 より,

$$(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(3b-c)x+1+b=0$$

が x について無限個の解をもつことになる．よって各係数はすべて 0 であり，$(a,b,c)=(1,-1,-3)$ が必要である．逆にこのとき，問題文の式が全ての正整数 n について成立することは解答例その 1 に同じ．

次に問 (2) の解説に移ります．ここでも 2 つの補題を用意しておきましょう．

補題 3. 正の整数 n について，

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

が成立する．

証明 帰納法でも，フィボナッチ数列の一般項を用いた方法でも解くことができます．ここでは，行列を使った方法を紹介します．フィボナッチ数列の漸化式から，$n \geqq 2$ について，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成立することがわかる．両辺の行列式 (det) をとって，

$$(-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

である．F_{n-1} を $F_{n+1} - F_n$ で置き換えれば $n \geqq 2$ について補題が示されたことになる．$n = 1$ についても実際に代入すれば正しいことがわかる．■

補題 4. 比 $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ は $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ に収束する．即ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

証明 フィボナッチ数の一般項を計算すると，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

である．あとは $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ よりよい．■

◦○◯ 問 (2) 解答例

無限個の n について成立するので，

(a) 無限個の奇数 n について成立している．

(b) 無限個の偶数 n について成立している．

の少なくとも一方が成り立っている．(a) のとき，全ての奇数 n について等号が成立することを示し，(b) のとき全ての偶数 n について等号が成立することを示そう．

以下, (a) 無限個の奇数 n について成立している場合を考えることにする.

2 変数多項式 $g(x,y)$ を $g(x,y)=f(x,y,x+y)$ により定めることにより, 問題の条件を次のように書きかえることができる.

$g(F_n,F_{n+1})=0$ をみたす正の整数 n が無限に存在する.

$g(x,y)$ の次数を r とし, 斉次多項式への分解を

$$g(x,y)=g_0+g_1(x,y)+\cdots+g_r(x,y)$$

とする. 例えば, $g(x,y)=x^3+x^2y+x^2+xy^2+xy+y^2+1$ であれば,

$$\begin{aligned} r&=3\\ g_3(x,y)&=x^3+x^2y+xy^2\\ g_2(x,y)&=x^2+xy+y^2\\ g_1(x,y)&=0\\ g_0&=1 \end{aligned}$$

となる.

以下, r に関する帰納法によって全ての奇数 n について等号が成立することを示す.

・ $r=0$ の場合は明らかである.

・ $r>0$ の場合を考える.

$\varphi_n=\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ とおくと,

$$\frac{1}{F_n^r}g(F_n,F_{n+1})=\frac{1}{F_n^r}g_0+\frac{1}{F_n^{r-1}}g_1(1,\varphi_n)+\cdots+\frac{1}{F_n}g_{r-1}(1,\varphi_n)+g_r(1,\varphi_n)$$

となる. これが無限個の奇数 n について 0 になることから, n に関する極限をとって,

$$g_r\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

となる (ここで補題 3 を用いた). $g_r(1,z)$ は整数を係数とする z に関する多項式であるから,

$$z^2-z-1=\left(z-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

で割りきれる. よって, $g_r(x,y)$ は y^2-xy-x^2 で割りきれることがわかる (こ

れから $r \geqq 2$ であることも同時にわかる).

$$g_r(x,y) = (y^2 - xy - x^2)g'_r(x,y)$$

により $g'_r(x,y)$ を定めることにする. 補題 3 より奇数 n に対して,

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = -1$$

であるから,

$$g'(x,y) = g(x,y) - g_r(x,y) - g'_r(x,y)$$

とすれば, 奇数 n について $g'(F_n, F_{n+1}) = g(F_n, F_{n+1})$ が成り立つ. $g'(x,y)$ の次数は $g(x,y)$ の次数より小さいので帰納法の仮定が成立し, 全ての奇数 n について $g'(F_n, F_{n+1}) = 0$ である. 故に全ての奇数 n について $g(F_n, F_{n+1}) = 0$ であることが示された. 以上で帰納法が完結し, (a) 無限個の奇数 n について成立している場合について問いが示された.

(b) 無限個の偶数 n について成立している場合も (a) の場合と同様にして示される. 具体的には, 偶数 n について

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = 1$$

であることから,

$$g'(x,y) = g(x,y) - g_r(x,y) + g'_r(x,y)$$

とすれば, 同じ論法が使え, 帰納法が完結する.

問 (2) の解答例は, 今回の問い以上のことを示唆しています. つまり次のことがわかります：

フィボナッチ数列の多項式型の公式は本質的に補題 3 に限る！

というのも, 与えられた公式を F_n, F_{n+1} のみで表してやれば, $(F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2)$ の項がくくり出せることがわかるからです. そしてこれを繰り返していけば結局は自明な恒等式になるとわかるのです.

1 つ例を見てみましょう. 次の公式は Hunter さんが 1966 年に見つけた公式です：

$$F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_{n+1}^4 = 2\left(2F_n^2 + (-1)^n\right)^2.$$

これも, F_{n-1} を F_n, F_{n+1} を用いて置き換えてしまえば, 補題 3 のみから示すことができます. このように, 一度公式を発見してしまえば, その正しさを判定することは機械的にできることがわかります (勿論, きれいな公式を発見することはそれ自体非常に難しいことですが…).

感想欄より

> ただ、今回でまだ２回目の TeX 投稿をしようとしたら３時間経ってしまったという事故に見舞われました。はやく打てるようにコピー、切り取りを繰り返したのですが､､､良い方法あったら教えて下さい。

手書きに比べると勿論 TeX の方が時間がかかると思いますが、私の経験だと TeX 打ちしているうちにペースが速くなったように思います (というかミスが少なくなったのかな？). というわけで, 毎回の問題コーナーで練習してゆけば徐々に速くなるのではないでしょうか.

> 問題については 3 変数多項式である意味を感じませんでした.

問 (1) に合わせて 3 変数にしただけで, 問 (2) は実質 2 変数の問題でした. これに惑わされてしまった方がいたとしたらスミマセンでした.

> （２）に苦労しました。本問を通して、フィボナッチ数列について詳しくなりました (笑い)。

フィボナッチ数列の問題を出そうとするとどうしても, フィボナッチ数列の性質を既知とした問題になってしまいがちです. それで, フィボナッチ数列に親しみを持っていただけたのならこちらの思惑どおりです (笑).

(なかむら ゆうすけ
東京大学理学部数学科 4 年)