問題コーナー
第 40 回
吉田 雄紀

G
2010年11月10日出題
12月10日締切
2011年 1月14日解説

平面上に, 同一直線上にない 3 点 A, B, C がある. このとき, 次に挙げる 7 点のうち, 異なる点の個数としてありうるものを全て求めよ：

三角形 ABC の重心, 外心, 垂心, 内心, 角 A 内の傍心, 角 B 内の傍心, 角 C 内の傍心.

解説

こんにちは, 第 40 回問題コーナー担当の吉田です. 遅くなってすみません.

今回の問題は, 一言で言うと「三角形の五心はいくつ？」というシンプルな問題でした.

A「三角形の五心はいくつ？」
B「そんなの文字通り 5 つに決まってるじゃないか」
A「ふふ, それが違うんだな. 傍心は 3 つあるから答えは 7 つなんだよ」
B「わあ, やられた」
C「でも, どんな三角形でも 7 つってわけじゃないよね. 三角形の形によってはいくつかが一致しているときもあるよね」
A「うっ」

◦○◯ 解答例 (劉霊輝さんの解答より)

三角形 ABC の重心を G, 外心を O, 垂心を H, 内心を I, 角 A 内の傍心を I_A, 角 B 内の傍心を I_B, 角 C 内の傍心を I_C とする.

補題 1. 傍心 I_A, I_B, I_C は他の点と重ならない.

補題 1 の証明. I_A, I_B, I_C は全て三角形 ABC の外部にある. また, それぞれ角 A, B, C の中にあるので, 互いに重なることはない. G, O, H, I の内, 三角形 ABC の外に出られるのは三角形 ABC が鈍角三角形のときの O と H である. しかし, H

は鈍角の対頂角の中にあるので, 傍心とは重ならない. よって, $\angle A > 90^\circ$ のときに I_A と O が重なるか調べればよい.

I_A と O が重なったと仮定する. $\angle ABI_A > 90^\circ$ より, $\angle B$ の外角の二等分線と AB の垂直二等分線が交わるのは直線 AB に対し C と反対側である. I_A は直線 AB に対し C と同じ側であるので, 矛盾. よって傍心が他の点と重なることはない.

残りの G,O,H,I について考える.

補題 2. G,O,H,I の内 2 点が重なるとき, 三角形 ABC は正三角形である.

補題 2 の証明. 6 通り全て確かめる.

i) G と O

A から BC への中線と BC の垂直二等分線は共に BC の中点を通る. しかし G は三角形の辺上にはないから, A から BC への中線は BC の垂直二等分線と一致する. よって $AB = AC$. 同様にして $AB = BC$, $BC = AC$ なので, 三角形 ABC は正三角形.

ii) G と H

A から BC に下ろした垂線と A から BC への中線は共に A を通るが, G は A とは異なるから, この 2 線は一致する. よって, 上と同様にして三角形 ABC は正三角形である.

iii) G と I

A から BC への中線と $\angle A$ の二等分線は共に A を通るが, G も I も A とは異なるから, この 2 線は一致する. よって, $AB : AC = 1 : 1$. 同様にして $AB = BC = CA$ がわかるので, 三角形 ABC は正三角形.

iv) O と H

A から BC に下ろした垂線と BC の垂直二等分線は平行なので, O と H が重なるためにはこの 2 線が一致する必要がある. よって i) と同様にして三角形 ABC は正三角形である.

v) O と I

I から BC,CA,AB に下ろした垂線の足を H_A,H_B,H_C とおく. I と O は一致するので, この垂線はそれぞれの辺の垂直二等分線と一致する. よって, $AH_B = H_BC = CH_A = H_AB = BH_C = H_CA$ なので, $AB = BC = CA$. よって三

角形 ABC は正三角形.

vi) H と I

A から BC に下ろした垂線と $\angle A$ の二等分線は共に A を通るが, I は A とは異なるから, この 2 線は一致する. 下ろした垂線の足を D とおくと, 二角夾辺相当より三角形 ABD と三角形 ACD は合同なので, $AB = AC$. 同様にして $AB = BC = CA$ がわかるので, 三角形 ABC は正三角形.

以上より, 3 つの傍心 I_A, I_B, I_C は他のどの点とも一致することはなく独立に存在し, また他の 4 点 G, O, H, I については, 2 点が重なるならば三角形 ABC は正三角形であることがわかった (このとき, これらの 4 点はすべて一致する).

したがって, 異なる点の個数は正三角形のときのみ **4 個**, それ以外ならば **7 個**である.

この問題を解くためには, 7 つの点のうち 2 つが一致した場合にそれぞれ何が起きるかを考えていく必要があります. しかし結果的には, どの 2 点が一致すると仮定した場合にも (矛盾が生じるか) 三角形 ABC が正三角形であるという結論が得られます.

${}_7\mathrm{C}_2 = 21$ 通りを試さなければならないと考えると, 非常に面倒な感じがしますが, 実際は傍心の 3 点が他のどの点とも一致しえないことが比較的簡単にわかり, あとは ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りを考えるだけで済みます.

なお, **オイラー線**の知識を用いると, さらに解答を短縮することができます.

命題. 三角形 ABC の外心, 重心, 垂心をそれぞれ O, G, H とおくと, 3 点 O, G, H は同一直線上にあり (この直線をオイラー線とよぶ), $OG : GH = 1 : 2$ である.

この命題 (の最後の式) を用いると, G と H が一致する場合や O と H が一致する場合において, G と O も一致していることが直ちにわかるため, 上の解答例において ii) や iv) の場合を考える際にすぐに i) に帰着することができます. 正解者の中にはオイラー線を用いて解答していた人もいました.

感想欄より

正直簡単でした. ただ, このほかにも面白い解法があればいいなと思いま

した.

今回の問題は易しかったと思います. と言っても, 解答を書くのに 1 日を費やしましたが $\cdots$. 問題コーナーにしては易しいので, 合っているかどうか不安です. 最も, 初等幾何は久しぶりですし, まずまず非自明な結果を得る事が出来たので, これも良い経験でした.

問題コーナーでは, 幅広い難易度の問題を出題していきます. 分野については, 最近はとても幅広いとはいえない状態ですが (組合せ論ばっかり $\cdots$), 今後はもう少し幅広く出題していければよいなと思います.

外心を『そとしん』と入力しないと反応しないのにこまった.

筆者の手元で変換を試してみると, 重心, 垂心, 内心はそのままでも出ました. 世の中的には G, H, I が major なのでしょうか.

最初の直感と導かれた答えが一致してしまい, 拍子抜けしてしまいました. 正三角形以外に, どれかが一致する三角形があると思ったのですが $\cdots$. 今回は, 比較的平坦な山道を散策した感じですね.

拍子抜けさせてしまってスミマセン. しかし, 確かに筆者もこの問題を解いていて 4 か 7 しかありえないとわかったときには, ほんの少し残念な気分になりました.
ところで, 三角形には, 五心の他にもなんらかの意味で「中心」とよばれる点が様々存在します. これらについて本問と同様のことを考えてみるのもよいかもしれません.

よしだ ゆうき
東京大学医学部医学科 3 年