

凸 n 角形 P を対角線によって $n-2$ 個の小三角形に分割した。ただし、これら小三角形の頂点はすべて P の頂点であるものとする。 P の任意の頂点に奇数個の小三角形が集まっているとき、 n は 3 の倍数であることを示せ。

解説

こんにちは、第 39 回問題・出題者の清水 俊宏です。

今回の問題は帰納法で解いてくれた人と三角形の色分けで解いてくれた人が半々でした。実は出題者である僕は出題時には前者の解答を想定解として用意していて後者の解き方は知りませんでした。なので、良い勉強になりました。

では、解答に入りましょう。まずは帰納法による答案です。

○○○ 解答例 (Big Wood さんの解答より)

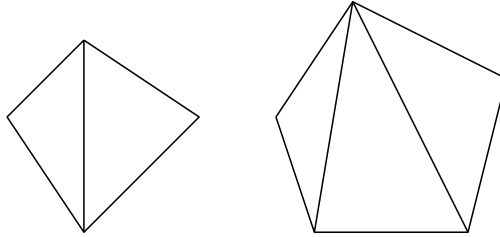
以下、対角線とは題意の分割に沿った対角線のみをいうものとする。

まず、題意のような分割を行うと、頂点に集まる小三角形の個数が偶数になるような頂点は必ず偶数個である (♡) ことを示す。

P の各頂点においてその次数をその頂点から出る対角線の本数と考える。すると、奇数個の小三角形が集まる頂点の次数は偶数、偶数個の小三角形が集まる頂点の次数は奇数になる。ここで、 P の次数の総和は対角線の本数の 2 倍に等しいので偶数でなくてはならない。よって、次数が奇数であるような頂点は偶数個ある。つまり、(♡) が成り立つ。

これを踏まえて、 n に関する数学的帰納法で示す。

まず、 $n \geq 6$ の場合を考えよう。 P を対角線で三角形に分割する場合、 $n = 4, 5$ については明らかに以下のような分け方しかできず、条件をみたさない。よって、 $n \geq 6$ の場合は条件をみたすならば n は 3 の倍数である。



次に、ある k に対して $n \leq 3k$ なる任意の n について題意が成り立つと仮定する。この仮定の下で、 $n \leq 3(k+1)$ なる任意の n について題意が成り立つことを示そう。ここで $n \geq 7$ の場合、 P を分割する対角線 AB であって、 P を i, j 角形 ($i, j \geq 4$) に分割するものが明らかに存在する。このとき、 $i+j-2=n$ である。

分割された両多角形は A, B 以外の頂点では必ず奇数個の小三角形が集まること、および (♡) により、両多角形のうち、一方はすべての頂点で奇数個の小三角形があつまり、他方は A, B では偶数個、それ以外の頂点では奇数個の三角形が集まっている。必要ならば i, j を入れ替えることで、前者の多角形を i 角形、 j 角形としてよい。

帰納法の仮定より、 i は 3 の倍数である。 j 角形については、 A, B の間に新しい頂点 D を加えて分割線 AB を書けばこの新しい $(j+1)$ 角形の各頂点には奇数個の小三角形が集まるので、 $j+1$ は 3 の倍数である。

よって、 $n = i+j-2 = i+(j+1)-3$ は 3 の倍数である。

以上により、帰納法によって題意は示された。

僕自身もこれと同様の模範解答を用意していました。実は、もう少し考えると 5 角形と $n-3$ 角形に分割するような対角線が存在することも示せます。この方針で解いてくれた人も何人かいました。

次に、三角形の色分けによる解法を紹介します。

◦○○ 別海 (woさんの解答より)

n 角形を $A_1A_2\dots A_n$ とする。 A_1A_2 を一辺とする三角形を黒く塗り、その後できた三角形の辺を共有する三角形が同じ色にならないように白と黒に塗り分ける。

すると、各頂点に集まる三角形の数が奇数であることから、各 $i=1, 2, \dots, n-2$ に対して、 A_iA_{i+1} を含む三角形が黒く塗られているならば $A_{i+1}A_{i+2}$ を含む三角形は黒く塗られていることがわかり、最初の塗り方から n 角形のどの辺に対して

も、その辺を含む三角形は黒く塗られていることがわかる。

ここで、黒い三角形が k 個、白い三角形が l 個あったとする。黒い三角形の辺はすべて、 P の辺になっているか白い三角形の辺と共通であるかのいずれかで、白い三角形の辺はすべて黒い三角形の辺と共通なので、

$$3k - n = 3l$$

よって n は 3 の倍数である。

与えられた「どの頂点にも奇数個の小三角形が集まる」という条件をうまく利用した、すばらしい解法だと思います。

感想欄より

比較的簡単だったと思います。(しかし解答作成は超 heavy) 最近難問が続いていたと思うので、一息つけました。こういう回は必要ですよ!!

初投稿です。帰納法とかではうまくいかなかったので気づけば一発のかっこいい解法があるのかと思い、三角形を二色に塗り分けてみたらできました。解答は単純だけどうまい問題だと思います。

結論がシンプルなのに、意外に難しくておもしろかった。

ありがとうございます。問題コーナーでは比較的簡単な問題から超難問までバランスよく出題していく予定ですので、どうぞ今後ともよろしくお願いします。

図がかければもう少しわかりやすく書けたのですが、

図をかけず、全て言葉で表現するのに苦労しました。拙い文章ですが、お願いします。

確かに、インターネットでの答案受付という性質上、どうしても図が描けないという問題が生じてしまいますね。これに関しては現在、前向きに善処することを検討している段階です。

(しみず としひろ
京都大学大学院情報学研究科修士2年)