問題コーナー
第 36 回
井 上 卓 也

C
2010 年 07 月 10 日出題
08 月 10 日締切
09 月 7 日解説

2 人で次の操作を行う．まず先手が空間上の 1 点を赤く塗る．次に，後手は空間上の 10 個の点を黒く塗る．以下これを繰り返すが，既に色の塗られた点を塗りなおすことはできない．このとき次の問に答えよ．

（1）後手がどのように黒点をおいても，先手はうまく点を赤く塗ることにより，長方形の 4 頂点をなすような 4 つの赤点をつくれることを示せ．

（2）後手がどのように黒点をおいても，先手はうまく点を赤く塗ることにより，直方体の 8 頂点をなすような 8 つの赤点をつくれるか．できるならその方法を，できないならその理由を説明しなさい．

解説

こんにちは，第 36 回問題コーナー担当の井上です．

今回の問題は図形の絡んだ組合せ問題でした。結論から言うと，先手は長方形をなす 4 つの赤点でも直方体をなす 8 つの赤点でもつくることができます。また，本問では後手が空間上の 10 個の点を黒く塗るとしていましたが，実は 10 を任意の正整数定数 l に変えても可能です．

本問の基本的な考え方は「点を一直線上に並べる」というシンプルなものです．ある直線 l_1 上に十分多くの赤点を並べたあとに，そのうちの 1 点を通る l_1 に垂直な直線上に別の赤点をとることにより，先手は一度にたくさんの「王手」をかけることができます．(2) ではそのアイデアを応用し，平面上にいくらでも大きい格子を作ることができることを示します．(1) はほぼ全員の方が正解し，(2) も 2 人の方が正解でした．

以下の解答では「後手は空間上の l 個の点を黒く塗る」とした一般的な場合において，可能であることを証明します．

◦○◯ 解答例

（1）xyz 座標平面を考える．先手はまず x 軸上の相異なる $l+2$ 個の点 $(a_i,0,0)$ $(i=1,2,\dots,l+2)$ を赤く塗る．このとき後手は空間上に $l(l+2)$ 個の黒点をつくるが，それら全ての点の y 座標と異なる値の 1 つを $b(b\neq 0)$ とする．次に先手は点 $(a_1,b,0)$ を赤く塗る．後手が一度に l 個の点しか黒く塗れないことから，先手はその次の手番に $(a_i,b,0)$ $(i=2,\dots,l+2)$ のうちのある 1 点 $(a_{i_0},b,0)$ $(2\leqq i_0\leqq l+2)$ を赤く塗ることができる．このとき 4 つの赤点 $(a_1,0,0),(a_{i_0},0,0),(a_{i_0},b,0),(a_1,b,0)$ が長方形をなす．

（2）先手は題意を満たす 8 つの赤点を構成できる．まず，次の補題を示す．

補題　先手は，任意の自然数の組 m,n に対し，ある m 個の相異なる実数 $a_1,a_2,\dots,a_m$ とある n 個の相異なる実数 $b_1,b_2,\dots,b_n$ をうまく選ぶことで，xy 平面上の相異なる mn 個の点 $(a_i,b_j,0)$ $(1\leqq i\leqq m, 1\leqq j\leqq n)$ を全て赤く塗ることができる．

補題の証明　n に関する数学的帰納法で示す．

a）$n=1$ のとき

先手は xy 平面上の直線 $y=b_1$ 上に m 個の赤点をとればよい．これは任意の自然数 m で可能である．

b）$n=k$ のとき補題が成立したと仮定する．

このとき任意の自然数 m について $m'=(l+1)m$ とおくと，仮定よりある m' 個の相異なる実数 $x_1,x_2,\dots,x_{m'}$ とある k 個の相異なる実数 $b_1,b_2,\dots,b_k$ について xy 平面上の相異なる $m'k$ 個の点 $(x_i,b_j,0)$ $(1\leqq i\leqq m', 1\leqq j\leqq k)$ を全て赤く塗ることができる．

このとき空間上にある全ての赤点および黒点の y 座標を考え，それらのどれとも異なる実数を b_{k+1} とおく．すると m' 個の点 $(x_i,b_{k+1},0)$ $(1\leqq i\leqq m')$ はまだ赤にも黒にも塗られていないため，先手はこのうち少なくとも $\dfrac{m'}{1+l}=m$ 個の点を赤く塗ることができる．よって選ばれた m 個の点の x 座標を改めて $a_1,a_2,\dots,a_m$ とおけば，相異なる $m(k+1)$ 個の点 $(a_i,b_j,0)$ $(1\leqq i\leqq m, 1\leqq j\leqq k+1)$ が全て赤点となる．ゆえに $n=k+1$ でも任意の m について補題は成立する．

$a),b)$ より補題は示された．

補題により xy 平面上の相異なる mn 個の点 $(a_i, b_j, 0)$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ が赤く塗れたとする．この時点で，空間上にある全ての赤点および黒点の z 座標を考え，それらのどれとも異なる値の 1 つを c とおく．以下，先手はまだ塗られていない mn 個の点 (a_i, b_j, c) $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ の中から長方形の頂点をなすある 4 つの点を赤く塗ることができることを示す．

まず $m \geqq (l+1)^2+1$ とすれば $\dfrac{m}{1+l} > l+1$ より，先手は m 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ の中から $l+2$ 個の実数 $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots a_{s_{l+2}}$ $(1 \leqq s_1 < s_2 < \cdots < s_{l+2} \leqq m)$ を選び，$l+2$ 個の点 (a_{s_k}, b_1, c) $(1 \leqq k \leqq l+2)$ を赤く塗ることができる．このとき平面 $z=c$ 上に存在する黒点は l^2+2l 個以下なので，$n \geqq (l+1)^2+1$ とすれば，それら全ての黒点の y 座標とは異なる b_{j_0} $(2 \leqq j_0 \leqq n)$ が少なくとも 1 つ存在する．よって先手が点 (a_{s_1}, b_{j_0}, c) を赤く塗れば，(1) と同様に後手は $l+1$ 個の点 (a_{s_k}, b_{j_0}, c) $(2 \leqq k \leqq l+2)$ を同時に防ぐことはできず，先手はその $l+1$ 個の点の中のある 1 点 $(a_{s_{i_0}}, b_{j_0}, c)$ $(2 \leqq i_0 \leqq l+2)$ を赤く塗って，平面 $z=c$ 上に長方形をなす 4 つの赤点を構成できる．

以上の操作により，先手は直方体の頂点をなす 8 つの赤点 $(a_{s_1}, b_1, 0)$, $(a_{s_{i_0}}, b_1, 0)$，$(a_{s_{i_0}}, b_{j_0}, 0)$，$(a_{s_1}, b_{j_0}, 0)$，$(a_{s_1}, b_1, c)$，$(a_{s_{i_0}}, b_1, c)$，$(a_{s_{i_0}}, b_{j_0}, c)$, (a_{s_1}, b_{j_0}, c) をつくることができる．

(2) はやや長い解答となっていますが，本質的な考え方ははじめにも述べたとおり「格子をつくる」ということです．(1) を利用して単に長方形を横に無限個作るだけでは，直方体の底面のうちの一辺が固定されてしまいますが，m 個の x 座標と n 個の y 座標を選び，それらの mn 個の交点を全て赤く塗ることで，直方体の底面の長方形に，縦にも横にも自由度をもたせています．補題においてこのことを数学的帰納法で示しています．

感想欄より

(2) は無理だろうというのが第一感でしたが，意外にも例を構成できてしまいました．

(2) は不可能かと思いましたが、出来ると分かったときは感動しました．一見して不可能と決めつけてはいけないと教えられました.

「可能であるか」という形式の問では答えが不可能であることが多いようですが，本問のように可能である場合もあるので，先入観をもたず実験をよく行うことが大切です.

問題を解くアイデアはシンプルだと思うが、解答の記述がごちゃごちゃしています.

初めて提出します。今までも何回か解いたことはあるのですが、何しろ打つのがめんどくさくて. . . 今回は楽かなと思って打ち始めたのですが，めんどくさくなってしまい，(2) はかなり適当になってしまいました.

今回の問題は図形に絡んだ問題であることもあって，解答が書きにくい問題となってしまいました．そんな中，様々な方法で解答を書いて応募してくださり，本当に嬉しく思います．これからも問題コーナーの問題に積極的に取り組んでみてください.

（いのうえ たくや
京都大学工学部電気電子工学科 3 年）