問題コーナー
第 35 回
栗林 司

C

2010年 6月10日出題
7月10日締切
8月 9日解説

n を正の整数とする. $2n+1 \times 2n+1$ のマス目と駒がある. 駒をあるマスからそのマスに隣接するマスへと動かすことを 1 回の「移動」ということにする. 次の条件をみたす最小の整数 N を求めよ.

条件：どのように $2n^2+2n$ 個のマスが赤く塗られても, 駒を好きなマスに置いてうまく N 回の「移動」をすることで, すべての赤いマスの上に 1 回以上駒を乗せることができる.

ただし, 駒は同じマスの上に何回乗ってもよいものとし, 最初に駒を置いたマスや最後に駒が到達したマスにも駒は乗ったと考えるものとする.

解説

こんにちは, 第 35 回問題コーナー担当の栗林です. 今回も組合せ論からの出題でした. 問題文が多少長くなっていますが, よく読めば状況は単純であることが分かってもらえると思います. それでは, 早速解説に移りましょう.

この問題を解くにあたってまずやるべきことは, 求める最小の N の推測をつけることです. $n=1,2$ あたりの場合で試してみると, 四隅が白になるような市松模様 (以下, これを単に市松模様ということにする) で塗ったときが最も「移動」回数がかかるのではないかということが分かってくると思います. これをきちんと証明することを考えましょう. 下からの評価の方が簡単なのでそちらを先に示します.

解答例

マス目を市松模様に塗った場合, 隣り合う 2 つの赤マスは存在しないので, 赤マスから別の赤マスに駒を移すには最低でも 2 回の「移動」が必要になる. よって, すべての赤マスの上に駒を乗せるためには $2\times(2n^2+2n-1)=4n^2+4n-2$ 回以上の「移動」が必要である.

次に, どのような塗り方に対しても $4n^2+4n-2$ 回以下の「移動」ですべての赤いマスの上に駒を乗せられることを示しましょう. 次の解答は, 出題者が予め考えていたものとほぼ同じ方針でした. 以下, 簡単のために赤く塗られていないマスを白マスということにします.

◦○○ **沖野赳也さんの解答より**

まず, 左下隅のマスが $(1,1)$, 右下隅のマスが $(2n+1,1)$, 右上隅のマスが $(2n+1,2n+1)$ となるように各マスに座標を与える. ここで隣り合う 2 つの白マスがない場合とある場合に分けて考える.

隣り合う 2 つの白マスがない場合, 隅のマスが赤く塗られていたとすると, その隅のマス以外を 1×2 の長方形 $2n^2+2n$ 個に分割することができ, その各々の長方形には白マスは高々 1 つしか含まれないので矛盾. よって四隅のマスは白マスである (市松模様しかあり得ないことも簡単に分かる). この場合, $(1,2n+1)$, $(2n+1,1)$ の 2 マスを除いた残り $4n^2+4n-1$ 個のマスをうまく移動できることを示す. まず $(2,2n+1)\to(3,2n+1)\to\cdots\to(2n+1,2n+1)$ と移動し, $(2n+1,2n+1)\to(2n+1,2n)\to(2n,2n)\to\cdots\to(1,2n)\to(1,2n-1)\to(2,2n-1)\to\cdots\to(2n+1,2n-1)$ と移動する. 同じ要領で, $(2n+1,2n-1)\to\cdots\to(1,1)\to\cdots\to(2n,1)$ とジグザグに移動できる. 各マスに 1 回しか乗っていないので, $4n^2+4n-2$ 回の移動である.

隣り合う 2 つの白マスがある場合, その白マスを (a,b), $(a+1,b)$ $(1\leqq a\leqq 2n$, $1\leqq b\leqq 2n+1)$ としても一般性は失われない. このとき残りのマスを次のように分ける.

(1) タテ $(1,1)-(1,b-1)$, ヨコ $(1,1)-(2n+1,1)$ の長方形 ($b=1$ の場合は存在しない)
(2) タテ $(a+2,b)-(a+2,2n+1)$, ヨコ $(a+2,b)-(2n+1,b)$ の長方形 ($a=2n$ の場合は存在しない)
(3) タテ $(a,b+1)-(a,2n+1)$, ヨコ $(a,b+1)-(a+1,b+1)$ の長方形 ($b=2n+1$ の場合は存在しない)
(4) タテ $(1,b)-(1,2n+1)$, ヨコ $(1,b)-(a-1,b)$ の長方形 ($a=1$ の場合は存在しない)

(2), (4)の長方形を考えると, 2 つの長方形のヨコの長さの和は奇数 $(=2n-1)$

より, (2)のヨコの長さを奇数としても一般性は失われない. また「(1)の長方形のタテ」≦「(3)の長方形のタテ」としても一般性は失われない. 即ち(2), (3)の長方形は存在するとしてよい. さて, これらのマスを移動しよう. まず, (1)の長方形だが, タテの偶奇に応じて出発点を $(1,1)$ または $(2n+1,1)$ とすれば, 後はヨコに折り返して移動していけば (ヨコに進んで, 端に着いたらタテに 1 マス進み, 又ヨコに進んでいく), 全てのマスを通って $(2n+1,b-1)$ に移動できる. $(2n+1,b-1) \to (2n+1,b)$ とし ((1)の長方形がない場合はここからスタートする), タテに折り返し進めば(2)の長方形の全てのマスを通って, $(a+2,2n+1)$ に移動できる. $(a+2,2n+1) \to (a+1,2n+1)$ とし, タテに折り返し進んで, (3)の長方形の全てのマスを通って $(a,2n+1)$ に移動できる. (4)の長方形がない場合はこれで終わりだが, ある場合は $(a,2n+1) \to (a-1,2n+1)$ とし, ヨコに折り返し進めば, (4)の長方形の全てのマスを通って, $(1,b)$ または $(a-1,b)$ に移動できる. 以上より $4n^2+4n-1$ 個のマス全てを $4n^2+4n-2$ 回の移動で通る事が出来た.

この解答において肝になっているところは, 答えである $4n^2+4n-2$ がマスの数より 3 少ないことに着目し, 白マス 2 つを除いてすべてのマスの上に 1 回ずつ乗るような経路を作るところです. この発想があればあとは注意深く場合分けをすることによって証明することができると思います.

感想欄より

初めてトライした前回は完全にノックアウトだったので, 今回は気合いが入りました. 市松模様に気づけば一本道だったように思います. これからも時間が許す限り, 挑戦したいと思っています. よろしくお願いします.

自分の出題した問題を気合いを入れて考えてもらえると嬉しいです. ありがとうございます. 出題者としては市松模様に気づいた後のほうが難しいんではないかと思っていたのですが, そこは個人差なようですね. こちらこそ今後ともよろしくお願いします.

(くりばやし つかさ
東京大学大学院数理科学研究科修士課程 1 年)