問題コーナー

第 34 回

浅野 知紘

C

2010年 5月10日出題
6月10日締切
7月 7日解説

f_1 は正の整数に対して定義され, 正の整数を値にとる関数である. すべての正の整数 k について $f_{k+1}(x) = f_1(f_k(x))$ と定める. このとき, ある正の整数の組 (m,n) が存在し, 任意の正の整数 x に対して $f_x(x) = mx+n$ となった. 組 (m,n) としてありうるのものを全て求めよ.

解 説

こんにちは, 第 34 回問題コーナー担当の浅野です. 今回は 3 人から解答があり, 正解 1 人でした. ご応募ありがとうございました.

今回の問題は, 条件をみたすものをすべて求める問題でした. (答えの予想をし,) ある集合に含まれる組が条件をみたすことと, その集合に含まれない組は条件をみたさないことを示す必要があります. この問題はどちらかはすぐにわかるというものでもなく, みなさん苦戦したようです.

それでは解答をみてみましょう.

◦○○ 解答例（沖野赳也さんの解答より）

題意をみたす集合は組 (m,n) で「m は 2 以上の整数 (n は任意の正の整数)」をみたすもの全体である.

（1） この集合に含まれる組が題意をみたすことを示す.

まず, 数列 $\{a_n\}$ を次の様に構成する. $a_1 = m+n$ として, 第 t 項まで定まっているときに,

- $a_t = m(a_k - 1) + n$ をみたす t 以下の数 k があるとき, $a_{t+1} = a_t + 1, a_{t+2} = a_t + m$ と定める.
- そうでないとき, $a_{t+1} = a_t + m$ と定める.

これによって, 正の整数の狭義単調増加列を得る.

さて, $f_1(x)$ を「数列 $\{a_n\}$ にあらわれる x より大きい整数の中で最小のも

の」として定める．このとき，$f_x(x)=mx+n$ である事を x に関する帰納法で示す．($f_1(a_n)=a_{n+1}$ に注意.)

a）$x=1$ のとき

$f_1(1)=a_1=m+n$

b）$x-1(\geq 1)$ 以下で成り立つと仮定する．

i. $f_1(x-1)=f_1(x)$ のとき
帰納法の仮定より，$f_{x-1}(x)=f_{x-1}(x-1)=m(x-1)+n$ である．また，$f_1(x-1)=f_1(x)$ より，x は数列 $\{a_n\}$ にあらわれない (もしあらわれれば，$f_1(x-1)=x<f_1(x)$ となり矛盾する) ので，$f_1(m(x-1)+n)=m(x-1)+n+m=mx+n$ となる．これらをあわせて，$f_x(x)=f_1(m(x-1)+n)=mx+n$ となる．

ii. $f_1(x-1)<f_1(x)$ のとき
f_1 の定義から，$f_1(x-1)=x$ である．帰納法の仮定から $f_{x-1}(x-1)=m(x-1)+n$ であるが，$f_{x-1}(x-1),x$ の 2 数は数列 $\{a_n\}$ にあらわれるので，$f_{x+1}(x-1)=f_2(f_{x-1}(x-1))=f_{x-1}(x-1)+m=mx+n$ である．また，$f_x(x)=f_x(f_1(x-1))=f_{x+1}(x-1)$ なので，$f_x(x)=mx+n$ となる．

これで，前半の証明が完了した．

（2）次に，この集合に含まれない，つまり $m=1$ である組が題意をみたさないことを示す．正の整数 x を，任意に固定する．はじめに，次の補題を証明する．

補題　$c_1<c_2$ (正の整数) のとき，$f_{c_1}(x)\neq f_{c_2}(x)$ が成立する．

Proof. ある $c_1<c_2$ について，$f_{c_1}(x)=f_{c_2}(x)$ となったとする．このとき y を $\{f_{c_1}(x),f_{c_1+1}(x),\cdots,f_{c_2}(x)\}$ の最大値とすると，任意の正の整数 c について $f_c(y)\leq y$ である．これは $f_y(y)=y+n$ に矛盾する． □

これから，ある正の整数 k_0 が存在し，k_0 以上の任意の整数 k について $f_k(x)\leq n+1$ である．なぜならば，そうでなければ c についての数列 $\{f_c(x)\}$ に無限個の n 以下の正の整数があらわれ，ある $c_1<c_2$ が存在し，$f_{c_1}(x)=f_{c_2}(x)\leq n$ となり，補題に反する．$n+1$ 数 $f_{k_0}(x),f_{k_0+1}(x),\cdots,f_{k_0+n}(x)$ を考えると，鳩の巣原理により n で割った余りが等しい 2 数 $f_a(x),f_b(x)(k_0\leq a<b\leq k_0+n)$ が存在することがわかる．$y=f_a(x)\geq n+1$ とすると，ある

> 整数 l によって $f_b(x)=y+ln$ とおける.
>
> a) $l<0$ のとき
>
> ある正の整数 s が存在して, $f_s(f_b(x))=y$, つまり $f_a(x)=f_{b+s}(x)$ であり, 補題に反する.
>
> b) $l=0$ のとき
>
> $f_a(x)=f_b(x)$ であり, 補題に反する.
>
> c) $l>0$ のとき
>
> ある正の整数 $s\geq y$ が存在して, $f_s(y)=y+ln$ となる. このとき, $f_b(x)=f_s(y)=f_{a+s}(x)$ であり, $b-a\geq n, n<y\leq s$ より $b<a+s$ であり, 補題に反する.
>
> これで, 後半が示された.

証明の前半, 条件をみたす f_1 の構成方法ですが, f_1 のとる値の集合をなるべく増やさないように小さい値から決めていっています. 基本的には $f_1(mx+n)=m(x+1)+n$ となるようにつなげていきます. しかし, $f_1(x-1)=x$ となる部分で上手くいかなくなるので, 証明中 $\{a_n\}$ の構成の 1 つ目の黒丸の部分に相当しますが, 適当にワンクッションおいてからつなげます. m が 2 以上だとそのためのスペースが空いているわけです.

証明の後半, $m=1$ のとき条件をみたす f_1 が存在しないことの証明では, ループ (f_1 で何回か写してもとの値にもどってくること) が起きてはならない (補題) ことに着目しています. $m=1$ では $f_x(x)$ が $x+n$ なので x が n に対して十分大きいところでは, f_1 が上手く構成できそうにありません. n で割った余りが等しい 2 数は小さい方の数を f_1 で写し続けると大きい方の数になることから, 証明のように, n で割った余りの等しい互いの近くにある 2 数を見つけてやることでループができてしまうことを言えばいいのです.

この問題では, m,n は正の整数でしたが, m は正の整数, n を $-m$ より大きい整数として同じ問題を考えることができます. $(m,n)=(2,-1)$ 以外では, 解答の方法がそのまま使えますが, $(m,n)=(2,-1)$ のときはうまくいきません. ちょっと考えてみたんですが, 僕には $f_x(x)=2x-1$ となりえるのかわかりません.

感想欄より

> 解答を書くのに疲れました. パソコンを使うのはいまだに苦手です.

お疲れさまでした. 頭の中で解けて (解けたと思って) から証明を書くのが厄介な問題でしたね (汗)

(あさの ともひろ
東京大学理科一類２年)