問題コーナー
第 31 回
関 典史

A
2010年 2月10日出題
3月10日締切
4月16日解説

正の実数に対して正の実数値をとる関数 f であって，以下の 2 条件をみたすものをすべて求めよ．
（1）任意の正の実数 x,y に対し，$f(x)f(y)=f(xy)+f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
（2）$1<x<y$ ならば $f(x)<f(y)$.

解 説

こんにちは，第 30 回問題コーナー担当の関です．今回は正解 4 人，準正解 2 人でした．ご応募ありがとうございました．

今回の関数方程式は比較的簡単なつもりでしたが，答えの予想はつきにくかったかもしれません．この問題は「整数で示し，有理数で示し，単調性を用いて実数で示す」という関数方程式でよくある方針を使うと解けます．この方針を知らなかった方はこの機会に是非マスターしてください．

それでは解答をみてみましょう．

◦○○ 解答例（宇保良男さんの解答より（一部改））

条件 (1) の式で $x=y=1$ として，$f(1)^2=2f(1)$ を得る．$f(1)>0$ より，$f(1)=2$.

また，$y=1$ として $2f(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を得る．よって，$f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

したがって，以下では $x>1$ のときについて考える．

条件 (1) の式で $y=x$ として $f(x)^2=f(x^2)+2$ を得る．ここで，$x^2>x>1$ から条件 (2) より $f(x)^2=f(x^2)+2>f(x)+2$ なので，$f(x)>0$ とあわせて $f(x)>2$.

$a>1$ とすると，$f(a)>2$ より，$f(a)=b+\dfrac{1}{b}$ $(b>1)$ とおける．このとき，非負整数 n に対し $f(a^n)=b^n+\dfrac{1}{b^n}$ であることを数学的帰納法で示す．

（1）$n=0,1$ のときは明らか.

（2）$n-1,n$ のときに成立したと仮定する．条件 (1) の式で $x=a, y=a^n$ とおくことで $f(a)f(a^n)=f(a^{n+1})+f(a^{n-1})$ を得る．したがって，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned} f(a^{n+1}) &= \left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b^n+\frac{1}{b^n}\right)-\left(b^{n-1}+\frac{1}{b^{n-1}}\right) \\ &= b^{n+1}+\frac{1}{b^{n+1}} \end{aligned}$$

よって $n+1$ でも成立.

よって示された.

以上より，$f(2)=t+\dfrac{1}{t}$ $(t>1)$ とおくと，正整数 n に対し $f(2^n)=t^n+\dfrac{1}{t^n}$ である.

また, 正整数 m,n に対し, $f(2^{\frac{n}{m}})=s+\dfrac{1}{s}$ $(s>1)$ とおくと, $f(2^n)=f\left((2^{\frac{n}{m}})^m\right)=s^m+\dfrac{1}{s^m}$ となる．よって $t^n+\dfrac{1}{t^n}=s^m+\dfrac{1}{s^m}$ であり，$t>1$，$s>1$ から $t^n=s^m$ となる．したがって $f(2^{\frac{n}{m}})=t^{\frac{n}{m}}+\dfrac{1}{t^{\frac{n}{m}}}$ である.

よって，正の有理数 r に対し $f(2^r)=t^r+\dfrac{1}{t^r}$ であることが示された.

次に，正実数 z に対し $f(2^z)=t^z+\dfrac{1}{t^z}$ を示す.

$f(2^z)>t^z+\dfrac{1}{t^z}$ とする．$t^z+\dfrac{1}{t^z}$ が $z>0$ において連続かつ狭義単調増加であり，有理数全体の集合は実数全体の集合において稠密であるので，$f(2^z)>t^r+\dfrac{1}{t^r}>t^z+\dfrac{1}{t^z}$ なる有理数 $r>z$ がとれる．このとき $1<2^z<2^r$ なので条件 (2) より $f(2^r)>f(2^z)>t^r+\dfrac{1}{t^r}$ となり $f(2^r)=t^r+\dfrac{1}{t^r}$ に矛盾.

$f(2^z)<t^z+\dfrac{1}{t^z}$ としても同様に矛盾が導かれるので，$f(2^z)=t^z+\dfrac{1}{t^z}$ が示された.

$z=\log_2 x$ $(x>1)$ とおくと，

$$f(x)=f(2^z)=t^z+\frac{1}{t^z}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^{\log_2 x} + \frac{1}{t^{\log_2 x}} \\
&= x^{\log_2 t} + \frac{1}{x^{\log_2 t}}
\end{aligned}
$$

$c = \log_2 t$ とおくと $c > 0$ で，$f(x) = x^c + \dfrac{1}{x^c}$ $(x > 1)$ となる．

$f(1) = 2$，$f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とあわせて，$f(x) = x^c + \dfrac{1}{x^c}$ $(x > 0)$ を得る．
逆に，この関数が問題の 2 条件を満たすことは簡単に確かめられる．
よって，求める関数は $f(x) = x^c + \dfrac{1}{x^c}$（$c$ は正定数）．

正解の人は大体これと同じ方針で，私の想定解もこれでした．答えの予想がつけばそれほど難しくはないのではないかと思います．$f(x)$ ではなく $f(2^x)$ を考えるという点で少し工夫が必要です．ちなみに別に 2 である必然性はなく，なにか $a > 1$ を固定して $f(a^x)$ を考えるということです．

冒頭にも書きましたが，f の単調性を用いて有理数から実数に広げる議論は関数方程式の定石なのでこの機会にマスターしましょう．有理数において示したあと，「f が単調増加で，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ において稠密なので」とだけかいて実数についても成立するとしていた人もいましたが，できれば上の解答のように厳密に書きましょう．

この問題は $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ という恒等式から作りました．なにか恒等式があればそこから関数方程式を作ってみると面白いかもしれません．もちろんそうやって適当に作った関数方程式はうまく解けないことも多いんですが（汗）

感想欄より

非負整数→非負有理数→非負実数→実数ともっていくやり方は型通りでしたが，今回は f の予想が付かなかったので面白かったです．

確かに予想はつきにくかったかもしれません．答えから作った作問者としてはよく分かりませんが（笑）面白いと言っていただけてなによりです．

　初応募です．答案は長くなりましたが，見通しよく証明できて満足しています．

　ありがとうございます．見通しのよい証明は読みやすくてありがたいです（笑）またこれからも応募してみてください．

（せき のりふみ
東京大学理科一類２年）