問題コーナー

第 30 回

大橋 祐太

C

2010年 1月10日出題
2009年 2月10日締切
3月13日解説

荒木さんは黒板に書かれている実数に対し, 以下の操作をすることができる.

操作：黒板に書かれている 2 つの実数 a,b を選んで消し, 改たに $a\sqrt{b}, b\sqrt{a}, \dfrac{1}{a+b}$ を書く.

今黒板に $\dfrac{1}{2}$ が 2 つ書かれている. この状態から荒木さんが何度か操作を行い, 操作終了時に黒板に書かれている全ての実数を $\dfrac{1}{2}$ より大きくできるか.

解説

みなさんこんにちは. 第 30 回の問題を担当させていただいた大橋です. 解説の発表が予定より遅れてしまい申し訳ありません. さらに 3 月 7 日の発表の段階では正解者なし, と表示されていましたが, これも僕のミスです, すいません. 実際は応募してくれた方全員 (9 名中 6 名となっているのは重複応募があったため) が正解でした. みなさまおめでとうございます.

最近この問題コーナーの応募が減っているのは問題が難しいせいもあるのかな, と思い、今回は比較的簡単な問題を出題してみました. なのでいつも難問を期待してた方には手ごたえが足りなかったと思いますが, 次回以降の問題コーナーの難易度はまたいつものように戻ると思うので, これからも挑戦してみてください.

この問題も発想一発, という感じで, 解答者全員が本質的に僕の想定解と同じ方法で解いていました. その解答を紹介します.

◦○○○ 解答例 1　峰岸龍さんの解答より, 一部修正

非負整数 n に対し, n 回の操作を終えたときに黒板に書かれている $n+2$ 個の実数の積を $f(n)$ とする. n 回目の操作で書き換える前の実数を x,y とすると, 相

加相乗平均の不等式より,

$$\frac{1}{x+y} \leqq \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

なので, これに注意して

$$x\sqrt{y}\cdot y\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x+y} \leqq \frac{xy}{2}$$

が成立. よって $n \geqq 1$ に対し, $f(n) \leqq \dfrac{f(n-1)}{2}$ を得る. また $f(0) = \dfrac{1}{4}$ より, 帰納的に $f(n) \leqq \dfrac{1}{2^n}$. これは黒板に書かれている実数をすべて $\dfrac{1}{2}$ より大にはできないことを示す.

黒板に書かれているすべての実数の積に注目するのがこの問題のすべてです. 操作によって変わらない量や常に増加, 減少する量を見つける, というのもよくある手法なので知っておくとよいと思います.

感想欄より

今回の問題は, 気付いてみれば簡単でした. 気が付かなければ相当苦労していたと思います. 最初は最低回数を見付けるために log2 をとって考えていました. (最初は $a = b$ で操作するのでこの方が計算が楽になります.) すると 2 つの同じ数に操作を行なうと必ず合計が 1 減ることに気付き, 次に 2 つの数が異なると合計が 1 より沢山減ることに気付いて, 「元の数を 2 倍した数」のすべての積を考えれば良いことに思い至りました.

発想一発系の問題は逆に気が付かないと為す術なく立ち往生することになりますよね. 元の数を 2 倍した数を考える, というのもありなのですね, なるほど. 作者はネタありきで問題を作るわけなのですが, このように問題のネタに気づく根拠まで書いてくれると, 作った側としてとても嬉しいです. ありがとうございます.

ここまでお読み戴き、ありがとうございます。たぶん、「1/2 以上にならない」ことも証明できますが、それではこの問題の美しさが損なわれると思うくらいの問題だと思いました。今年の夏も楽しみです。次の問題も楽しみに待ち構えています。

1/2 以上にならない, は最初 1 回操作をすると $\frac{1}{2}$ ではない 2 種類の数が出てきてしまうことと, 1 回でも異なる 2 数に操作をすると解答の不等式の等号が外れることから証明できます. 美しさは確かに損ねますが, このままだとあまりに気づくか気づかないかの問題なので, ある意味ではそのあたりの些細な議論もさせる問題にした方がよかったのかもしれませんね. 夏は僕も無限に楽しみです. 次の問題も頑張ってください.

受験勉強ばかりしていたので癒されました.

受験勉強はだるいですよね. お疲れ様です. 受験の結果はどうでしたか? また機会があればお会いしましょう.

数学の問題で、村人が登場したり、バッタがジャンプしたり、ハエが飛んだり…ということはありましたが、荒木さんは初めてでした。黒板の問題は前回のＡＰＭＯにも出ていましたが、今回は積が有効と見ました。

実は今回の問題はその APMO の問題を参考にしました. たしか僕が作ったこの前の問題も元ネタがばれていたような気がします (笑) あと荒木さんは僕の初恋の人です. たぶんもう 2 度と出てこないと思います.

感想: O-hos は”大橋 佑太”じゃなくて”大橋 祐太”だと信じているのですが…。某中村さんのように名前が変わったのかな?かな? それともこの担当者さんと O-hos は別人?まさか。なんか久し振りに問題 corner に来てみたら簡単な問題だったので驚きました。見た瞬間掛けたら終わったので。運が良かっただけか。本選でこの問題が出たらよかったのに。こんなことを言っていて解答が間違っていたら話にならないけど ww mail address に何も書かずに送信したら撥ねられて入力値が全部消えたかと焦りました。まあそんなに痛手ではない気もしますが。PC の mail address は友達と共用なので携帯の物にします。いいですよね? 文字化けしてしまったので家用のものにします。今見たら解答より感想の方が長かった ww

最後の一文に大爆笑させていただきました. はい, 僕は大橋祐太なのですが, 問題コーナーでは大橋佑太というペンネームで参加させていただいています. ちなみに中村さんは名前が変わったわけではありません (笑) 名前の漢字の読みに 2 通りの解釈がある, というだけです. どっちが正しいんですか?僕も分かりません.

問題が簡単なのは最初にかいたような背景があります. たぶん本選だとこのレベルの問題はでないでしょう. 最後の方の文章はまぁ結論は家用を使ったということですよね. それにしても PC のメールアドレスが友達と共有なんて, ラブラブですね. あっ今見たら僕も問題の解説より感想欄よりの方が長かった (笑)

(おおはし ゆうた
東京大学理科一類 2 年)