問題コーナー
第 29 回
松本 雄也

G
2009年12月10日出題
2010年 1月10日締切
2月 7日解説

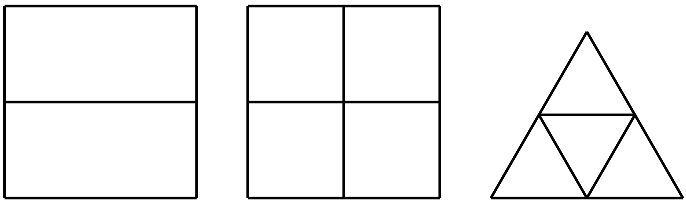
> 多角形 P の内部に有限個の線分を引くことにより, P を面積が相等しい m 個の部分に分けたい. さらに, 引く線分の長さの和を l 未満にしたい. このことが可能かどうかを, 以下の (a), (b), (c) 各々の場合について判定せよ.
> (a) P は一辺 1 の正方形, $m=2$, $l=1$.
> (b) P は一辺 1 の正方形, $m=4$, $l=2$.
> (c) P は一辺 2 の正三角形, $m=4$, $l=3$.

解説

こんにちは, 出題者の松本です.

今回の問題には 8 人から解答があり, うち 1 人が正解でした.

まず, 多くの解答者が指摘していたように,



(a)　(b)　(c)

のようにすると線分の長さの和がちょうど l になります.

これより (真に) 短くできるか否かが今回の問題です (残念ながら, この分け方を与えることで問題を解いたことになると勘違いしている人がいました. 問題文に「未満」と書いてある点に注意してください).

答を言ってしまうと, (a) は不可能で, (b), (c) は可能です.

まず, (a) について, 正解者の解答を紹介します. 以下では線分の長さの和を L で表します.

◦○◯ **解答例** (dsk **さんの解答より**)

一般に, 長さ t の曲線が面積 a の図形の境界となっているとき $t^2 \geq 4\pi a$ となる, という事実 (等周不等式) を用いる.

いくつかの線分で正方形を 2 等分したとする. 不必要な線分を取り除くことで, 次が成り立つとしてよい：線分全体は

- 正方形の周上の点 Q から周上の点 R への折れ線になっているか, または
- 正方形の周と交わらない閉折れ線である.

折れ線を X とおく. 後者の場合, 等周不等式より $L^2 \geqq 4\pi/2$ ゆえ $L \geqq \sqrt{2\pi} > 1$ となる. 以下, 前者の場合を考える. Q, R の位置関係で場合分けする.

Q, R が対辺上にある場合：明らかに $L \geqq 1$ である.

Q, R が同一辺上にある場合：その辺に関し X を折り返してできる折れ線を X' とおくと, X と X' を合わせた閉折れ線は長さが $2L$ で囲む面積は 1 である. よって等周不等式から $(2L)^2 \geqq 4\pi$ となり, ここから $L \geqq \sqrt{\pi} > 1$ を得る.

Q, R が隣り合う辺上にある場合：X をその 2 辺の一方に関し折り返すか両方に折り返すかしてできる折れ線を X', X'', X''' とおくと, X, X', X'', X''' を合わせた閉折れ線は長さが $4L$ で囲む面積は 2 である. よって等周不等式から $(4L)^2 \geqq 4\pi \cdot 2$ となり, ここから $L \geqq \sqrt{\pi/2} > 1$ を得る.

以上より, いずれの場合にも $L \geqq 1$ となることが示された.

等周不等式自体の証明については, 一般の曲線を扱おうとすると, 「曲線」や「曲線の囲む図形」とは何なのかを厳密に考える必要があってけっこう大変になるのですが, 折れ線に関してのみであればそこまで難しくないと思います (そして上の解答ではその場合しか用いていません). 興味ある読者の方は考えてみてください.

次に, 等周不等式を用いない解法を紹介します.

◦○◯ **別解** (**出題者による**)

Q, R の位置関係で場合分けし, 対辺上にある場合を示すところまで上の解に同じ.

Q, R が同一辺上にある場合：その辺と隣り合う 2 辺の中点を結んでできる直線 ℓ を考える. X が ℓ と交わらないならば, X の囲む面積が 1/2 より小さくなって仮定に反する. X が ℓ と交わるならば, その交点のひとつを S とおくと, Q から S までと S から R までで各々長さが 1/2 以上ある (実際, S から Q, R のある

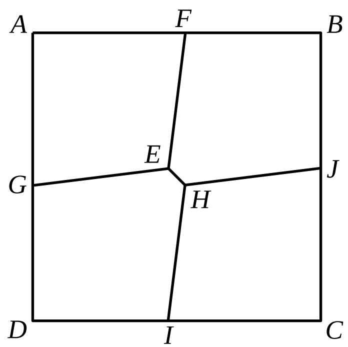
辺へ下ろす垂線の長さが 1/2 である) ので, $L \geqq 1$ となる.

Q, R が隣り合う辺上にある場合：その 2 辺を AB, BC とおき, 対角線 AC を考える. X が AC と交わらないならば, X の囲む面積が 1/2 より小さくなって仮定に反する. X が AC と交わるならば, その交点のひとつを S とおくと, S から辺 AB, BC へ下ろす垂線の長さの和は 1 であり, Q から S までと S から R までの長さはそれぞれ対応する垂線の長さ以上なので, $L \geqq 1$ となる.

では次に (b) の解答を紹介します.

◦○◯ **解答例** (dsk **さんの解答より**)

正方形を $ABCD$ とおく. 線分 AC 上に, $AE = 2/3$ なる点 E と $HC = 2/3$ なる点 H をとる. 線分 AB, AD 上に, $AF = AG = 3\sqrt{2}/8$ なる点 F, G をそれぞれとる. 線分 CD, CB 上に, $CI = CJ = 3\sqrt{2}/8$ なる点 I, J をそれぞれとる. このとき, 5 つの線分 EF, EG, EH, HI, HJ を引くと, 面積は 4 等分され, かつ $L < 2$ となることを示す.



まず面積が 4 等分されていることを確かめる. F から AC へ下ろした垂線の足を K とおく. 三角形 AEF において AE を底辺と見ると, $AE = 2/3$ で高さは $FK = AF/\sqrt{2} = 3/8$ なので, 面積は 1/8. 四角形 $AFEG$ の面積はその 2 倍なので 1/4. 対称性より四角形 $CIHJ$ の面積も 1/4 であり, 対称性より残り 2 つの五角形が残りの面積を 2 等分しているので, いずれも面積は 1/4 になる.

次に長さを調べる. 対称性より $L = 4FE + EH$ なので, FE と EH の長さを計

算すればよく,

$$FE^2 = FK^2 + KE^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{130}{24^2}$$

$$EH = AC - AE - AH = \sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

から,

$$L = 4FE + EH = \frac{\sqrt{130} + 6\sqrt{2} - 8}{6}$$

を得る. $\sqrt{130} < 11.5$ および $6\sqrt{2} < 8.5$ より, $L < 2$ となることがわかる.

この例では $L \approx 1.982$ です. AE $(= HC) = 2/3$ という数値はあまり本質的ではなく, $1/\sqrt{2}$ より小さく 0.63 より大きい値ならなんでもよいです (AF などは $AF \cdot AE = \sqrt{2}/4$ となるようにとる).

L をできるだけ小さくすることを考えてみます. dsk さんも指摘しているように, 線分 EF を, ある円弧 (F を通るわけではなく, また A を中心にもつわけでもない) を近似する折れ線に置き換えることでさらに折れ線を短くできます (等周不等式の応用). この方針では, $AE \approx 0.652$ が最適で $L \approx 1.9756$ とできますが, 他の分け方でこれより小さくできないのかどうかは (出題者には) わかっていません.

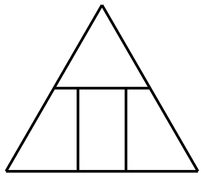
下からの評価に関しては, 上図のような分け方に対して,

- (a) の結果から, $FE + EH + HI \geqq 1$, $GE + EH + HJ \geqq 1$
- 等周不等式から ((a) の証明を参照), $FE + EG \geqq \sqrt{\pi}/2$, $IH + HJ \geqq \sqrt{\pi}/2$

がわかるので, ここから $L \geqq 1 + \sqrt{\pi}/2 \approx 1.886$ が従い, この評価は例えば線分 EF を折れ線で置き換えてもそのまま成り立ちます. 他の形の分け方についてもやはり $1 + \sqrt{\pi}/2$ で下から評価できると思います (詳細は読者に委ねます).

これよりよい評価を見つけた方はぜひお知らせください.

最後に (c) で $L < l = 3$ とできることを示します. これは, 冒頭に挙げた $L = 3$ なる例の 3 本の線分の各々を, 各頂点を中心とする正 12 角形の一部 (ないし, より円弧に近い折れ線) に置き換えることによってもでき, この方針では L は $\sqrt{\sqrt{3}\pi/6}$ (≈ 2.857) より大きい任意の値をとることができます. しかしもっと簡単に $L = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$ となる例が作れるので, それを紹介して終わりにします (これが最小ではありません).



(まつもと ゆうや
東京大学大学院数理科学研究科修士 1 年)