問題コーナー
第 28 回
吉田 雄紀

G
2009年11月13日出題
12月10日締切
2010年 1月 7日解説

凸四角形 $ABCD$ の対角線 AC, BD の交点を X とおく. 辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S があり, 次の条件をみたす：

- 3 点 P, X, R と 3 点 Q, X, S はともに同一直線上にある.
- $\angle APR = \angle DRP$, $\angle BQS = \angle ASQ$ である.
- 4 点 P, Q, R, S は同一円周上にある.

このとき, $AD + BC = AB + CD$ が成立することを示せ.

こんにちは. 第 28 回問題コーナー担当者の吉田です. 問題に取り組んでくださった皆様, ありがとうございました.

ではさっそく, 今回の問題の解答にうつりたいと思います.

今回の問題において, 鍵となる命題は次のようなものです：

(1) $AD + BC = AB + CD$ が成立する (本問題の結論).

(2) $AP = AS$, $BQ = BP$, $CR = CQ$, $DS = DR$ が成立する.

(3) 問題文中の円は, 四角形 $ABCD$ の内接円である.

結果的に, これらはいずれも成立します. しかし, (3) から (2), (2) から (1) を示すのは比較的容易ですが, 先に (3) を直接証明しようとするとなかなかうまくいきません. 以下の解答例では, (2) を直接示し, それから本問題の結論である (1) を示します.

◦○◯ 解答例

C を通り AB に平行な直線と PR との交点を P' とする. C を通り AD に平行な直線と QS との交点を S' とする. このとき $\angle CS'S = \angle ASQ = \angle BQS$ より $\angle CS'S + \angle CQS = 180^\circ$ なので, 三角形 CQS' は二等辺三角形である (ただし, Q と S' が一致し $\angle CQS = 90^\circ$ となる場合もある). 同様にして, 三角形 $CP'R$ は二等辺三角形である (ただし, P' と R が一致し $\angle CRX = 90^\circ$ となる場合もある).

ここで, $\dfrac{XS'}{XS} = \dfrac{XC}{XA} = \dfrac{XP'}{XP}$ であり, また $XP \cdot XR = XQ \cdot XS$(方べきの定理) であることより, $XQ \cdot XS' = XQ \cdot XS \cdot \dfrac{XS'}{XS} = XP \cdot XR \cdot \dfrac{XP'}{XP} = XP' \cdot XR$ である. よって,

(1) $S' \neq Q$, かつ $P' \neq R$ の場合 (一般の場合)

方べきの定理の逆より 4 点 P', Q, R, S は同一円周上にある. この円の中心は $S'Q$ の垂直二等分線上にも $P'R$ の垂直二等分線上にもあるはずだが, そのような点は点 C しかない (2 直線は一致しないため). よって 4 点を通る円の中心は C である. したがって, とくに $CQ = CR$ である.

(2) $S' = Q$ または $P' = R$ の片方のみが成立する場合 (ここでは $S' = Q$ のみ成立するとして議論する)

$XQ^2 = XP' \cdot XR$ となり, 方べきの定理の逆より 3 点 $P', Q(= S'), R$ を通る円は点 Q で直線 QS に接する. この円の中心は Q を通る QS の垂線上にも, $P'R$ の垂直二等分線上にもあるはずだが, そのような点は点 C しかない (2 直線は一致しないため). よって 3 点を通る円の中心は C であり, とくに $CQ = CR$ である.

(3) $S' = Q$ かつ $P' = R$ の場合

$XQ^2 = XR^2$ となるため $XQ = XR$ である. これと $\angle CQX = \angle CRX = 90^\circ$ であることより, 三角形 CQX と三角形 CRX は合同であることがわかり, とくに $CQ = CR$ である.

以上より, $CQ = CR$ が成立することが示された. 同様の議論によって $AS = AP$, $BP = BQ$, $DR = DS$ が示される. よって, $AD + BC = AS + DS + BQ + CQ = AP + DR + BP + CR = AB + CD$ となる.

最初にも述べましたが, 本問題において, 4 点 P, Q, R, S を通る円は, 実は四角形 $ABCD$ の内接円であることがわかります. 興味のある方は証明にチャレンジしてみてください.

感想欄より

問題の全体像はつかめたのですが, それをどう厳密に証明すべきか悪戦苦闘しました. 出来上がった解答でさえ論理的厳密性にやや不安がありますが….

今回の問題は, 4 点 P, Q, R, S を通る円が四角形 $ABCD$ の内接円に「途中でうっかり」なってしまう危険と隣り合わせになっている気がしますね.

(よしだ ゆうき
東京大学理科 3 類 2 年)