問題コーナー

第 27 回

渡部 正樹

N

2009年10月10日出題
11月10日締切
2008年12月 7日解説

実数係数多項式 $f(x)$ があり, 任意の整数 n に対して, $f(n)$ はある整数の 2 乗になっている. このとき, $f(x)=g(x)^2$ となる実数係数多項式 $g(x)$ が存在することを示せ.

解説

第 27 回の担当の渡部正樹です. 今回は多項式に関する数論的な問題でした. 以下, 解答です.

◦○○◯ **解答例**

十分絶対値の大きい n に対して $f(n)$ が正であることから, f の次数は偶数 ($2k$ とおく) で, 最高次の係数は正である. すると, $f(x)=g(x)^2+h(x)$, $\deg g=k$, $\deg h<k$ となるような実数係数多項式 g, h がとれる (多項式 0 の次数は形式的に $-\infty$ とみなす. 以下でも同様). なぜなら, $f(x)=a_{2k}x^{2k}+\cdots+a_0$ とすると, $b_k^2=a_{2k}, 2b_kb_{k-1}=a_{2k-1}, 2b_kb_{k-2}+b_{k-1}^2=a_{2k-2}, \cdots$ が成り立つように実数 $b_k,\cdots,b_0$ を順次決めることができ ($a_{2k}>0$ であり, $b_k\neq 0$ となることに注意), このとき $f(x)-(b_kx^k+\cdots+b_0)^2$ は $k-1$ 次以下の多項式となるからである.

必要ならば g のかわりに $-g$ を考えることで, g の最高次の係数は正としてよい.

$\deg h<\deg g$ であり, g の最高次の係数は正なので, ある n_0 が存在し, $n\geqq n_0$ ならば $g(n)>0$, $\dfrac{|h(n)|}{g(n)}<2^{-k-1}$ となる. すると, $n\geqq n_0$ なる整数 n に対し,

$$|\sqrt{f(n)}-g(n)|=\frac{|h(n)|}{\sqrt{f(n)}+g(n)}\leqq\frac{|h(n)|}{g(n)}<2^{-k-1}$$

が成り立つ.

一般に $A(x)$ が x の l 次以下の式のとき, $A(x+1)-A(x)$ は x の $l-1$ 次以下の

式である. これを $g(x)$ に対して $k+1$ 回用いれば,

$$g(x+k+1)-{}_{k+1}C_1 g(x+k)+{}_{k+1}C_2 g(x+k-1)+\cdots+(-1)^{k+1}g(x)$$

は x の -1 次以下の式, つまり 0 であることがわかる. すると, $n \geqq n_0$ なる整数 n に対し,

$$\begin{aligned}
&|\sqrt{f(n+k+1)}-{}_{k+1}C_1\sqrt{f(n+k)}+\cdots+(-1)^{k+1}\sqrt{f(n)}| \\
=&\Big|\big(\sqrt{f(n+k+1)}-{}_{k+1}C_1\sqrt{f(n+k)}+\cdots+(-1)^{k+1}\sqrt{f(n)}\big) \\
&-\big(g(n+k+1)-{}_{k+1}C_1 g(n+k)+\cdots+(-1)^{k+1}g(n)\big)\Big| \\
\leqq&|\sqrt{f(n+k+1)}-g(n+k+1)|+{}_{k+1}C_1|\sqrt{f(n+k)}-g(n+k)|+ \\
&\cdots+|\sqrt{f(n)}-g(n)| \\
<&2^{-k-1}({}_{k+1}C_0+{}_{k+1}C_1+\cdots+{}_{k+1}C_{k+1})=1
\end{aligned}$$

となる. 最初の式は整数なので, 結局

$$\sqrt{f(n+k+1)}-{}_{k+1}C_1\sqrt{f(n+k)}+\cdots+(-1)^{k+1}\sqrt{f(n)}=0 \quad (n \geqq n_0)$$

がわかる.

$\sqrt{f(x)}$ と $x=n_0, n_0+1, \cdots, n_0+k$ で一致するような k 次以下の多項式 $r(x)$ をとる. すると, $r(n+k+1)-{}_{k+1}C_1 r(n+k)+\cdots+(-1)^{k+1}r(n)=0$ も成立するので, 帰納的に $r(n)=\sqrt{f(n)}(n \geqq n_0)$ つまり $f(n)=r(n)^2(n \geqq n_0)$ がわかる. よって, 多項式 $f(x)$ と $r(x)^2$ は無限に多くの x で一致するので, 多項式として $f(x)=r(x)^2$ である.

今回の問題は「多項式の値がすべての整数において平方数なら多項式自体も”平方数”である」というものでしたが, 「平方数である」の部分を他の性質に置き換えて同様の問題を考えてみるのも面白いかもしれません.

(わたなべ まさき
東京大学理学部数学科 3 年)