問題コーナー
第 24 回
栗林 司

A
2009年 7月10日出題
8月10日締切
2008年 9月 7日解説

> 正の実数に対して定義され, 正の実数値をとる関数 f であって, 任意の正の実数 x, y に対して
> $$f(f(x)+f(y))=x+y$$
> をみたすものをすべて求めよ.

解説

こんにちは, 第 24 回問題コーナー担当の栗林です. 今回は第 15 回, 第 18 回に引き続き, 関数方程式という分野からの出題でした. 関数方程式全般の解き方については第 15 回の解説に分かりやすくまとめてあるので, この分野の問題に慣れていないという方は読んでみてください. 今回の問題は慣れている人からすれば典型とも言える比較的簡単な問題を出題しました.

問題文を見れば, $f(x)=x$ が解になることはすぐわかるでしょう. 実数から実数への写像ならば $f(x)=-x$ も解になりますが, 今回の場合正の実数から正の実数なのでこれは解にはなりません. 以下で解が $f(x)=x$ のみであることを証明していきます. (ただ, $f(x)=x$ が解であることを確かめるというのも大事なステップであり, これを忘れると議論が完結したことにはなりません.)

次の解答が, 出題者が予め考えていたものに最も近いものでした.

Kuu さんの解答より

まず, f が全単射であることを示す.

任意の正の実数 a に対して与式に $x=y=\dfrac{a}{2}$ を代入すると $f\left(2f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)=a$ となるので f は全射.

$f(a)=f(b)$ ならば, 与式に $x=y=a$ を代入して $f(2f(a))=2a$, $x=y=b$ を代入して $f(2f(b))=2b$ を得る. よって $a=b$ となるので f は単射である.

もしある正の実数 a が $f(a)>a$ を満たすとすると, $b=f(a)-a>0$ とおけば

与式に $x=a, y=b$ を代入して $f(f(a)+f(b))=a+b=f(a)$ となる. 単射性より $f(a)+f(b)=a$, つまり $f(b)=a-f(a)<0$ となり矛盾.

また, もしある正の実数 a が $f(a)<a$ を満たすとすると, $f(b)=a-f(a)>0$ なる b をとれば与式に $x=a$, $y=b$ を代入して $f(a)=a+b$, すなわち $b=f(a)-a<0$ となり矛盾.

以上より $f(x)=x$ でなければならない.

このように, 条件をみたす関数が全射である, もしくは単射であるということを示すことが有効なことがしばしばあります. 他の 3 人の正解者の方は, 次のように f が狭義単調増加であるということを使って解いていました.

◦○○ dsk **さんの解答より**

まず次を示す.

任意の正の実数 p, q, r, s に対して

$$f(p+q+r+s)=f(p)+f(q)+f(r)+f(s) \tag{1}$$

が成立する.

証明 $x=f(p)+f(q), y=f(r)+f(s)$ を与式に代入すると $f(x)=f(f(p)+f(q))=p+q$, $f(y)=f(f(r)+f(s))=r+s$ より, $f(p+q+r+s)=x+y=f(p)+f(q)+f(r)+f(s)$ となる. ■

次に f が狭義単調増加であることを証明する. 任意の正の実数 x,y が $x<y$ を満たすとき, (1) を $p=x, q=r=s=(y-x)/3$ として適用すると,

$$f(y)=f(p+q+r+s)=f(p)+f(q)+f(r)+f(s)=f(x)+3f(q)>f(x)$$

となるので $f(x)$ が狭義単調増加であることが言える.

次に下記補題を証明する.

補題 任意の非負整数 m,n と任意の正の実数 x に対して

$$f\left(\frac{3m+1}{3n+1}x\right)=\frac{3m+1}{3n+1}f(x)$$

となる.

証明 数学的帰納法により任意の非負整数 m と任意の正の実数 x に対して

$$f\big((3m+1)x\big)=(3m+1)f(x)$$

となることを証明する. $m=0$ での成立は自明. 非負整数 k に対して $m=k$ で成

立するとすると, $m=k+1$ のとき, (1) で $p=3kx,\ q=r=s=x$ とすれば

$$f\bigl((3m+1)x\bigr)=f\bigl((3k+1+3)x\bigr)=(3k+1+3)f(x)=(3m+1)f(x)$$

となり成立する.

$y=\dfrac{x}{3n+1}>0$ とすると,

$$f\left(\frac{3m+1}{3n+1}x\right)=f\bigl((3m+1)y\bigr)=(3m+1)f(y)$$

でありまた,

$$f(x)=f\bigl((3n+1)y\bigr)=(3n+1)f(y)$$

であるから

$$f\left(\frac{3m+1}{3n+1}x\right)=\frac{3m+1}{3n+1}f(x)$$

となる. ■

次に $f(1)=a$ とおく. このとき補題から任意の非負整数 m,n に対して

$$f\left(\frac{3m+1}{3n+1}\right)=\frac{3m+1}{3n+1}a$$

である. 任意の正の実数 x を 1 つとって固定し, $f(x)=ax$ となることを示す.

ε に対して $n>a/\varepsilon$ かつ $3n+1>1/x$ となる非負整数 n をとる. m を $(3m+1)/(3n+1)<x$ が成立するような最大の非負整数とする.

このとき,

$$\frac{3m+1}{3n+1}<x\leqq\frac{3(m+1)+1}{3n+1}$$

が成立する. この辺々に f の単調増加性を利用して f を適用した式, および正の実数 a を掛けた式は,

$$\frac{3m+1}{3n+1}a<f(x)\leqq\frac{3(m+1)+1}{3n+1}a,\ \frac{3m+1}{3n+1}a<ax\leqq\frac{3(m+1)+1}{3n+1}a$$

となるが, 両式の右辺から左辺を引いた値は共に

$$\frac{3(m+1)+1}{3n+1}a-\frac{3m+1}{3n+1}a=\frac{3a}{3n+1}<\frac{a}{n}<\varepsilon$$

となるから, $|f(x)-ax|<\varepsilon$ となる. ε は任意であるから $f(x)=ax$ となる.

また与条件で $x=1$ とすると $f(2a)=2$ となるから $2a^2=2$ となる. $a>0$ であるから $a=1$ となる. よって $f(x)=x$ である.

このような正の実数を値域とする問題では, 稠密な部分での値を求め, そこから全体での値が決まる, という議論をすることが多いです. 通常は実数の中で有理数が稠密 (どんなに小さな区間をとってもその中に存在する) ということを使うことが多いですが, 今回の場合は $\dfrac{3m+1}{3n+1}$ の形の有理数が実数の中で稠密であることを使いました.

感想欄より

「連続性または単調性」+「稠密な集合での解」という定番ではありますが, 変数が増えることを恐れずに与条件をそのまま 2 重に適用するのが解法への道となる意外性が面白かったです.

正解者のうち 2 人の方が $f(p+q+r+s)=f(p)+f(q)+f(r)+f(s)$ という式を使っていたのですが, 実は出題者は別の方針で解いていたので気づいていませんでした……意図しないところでしたが面白くなったようで良かったです.

頭の体操にちょうど良かったです. このレベルの出題が良いんじゃないですかね. 普段は難しすぎる.

確かに今回は最近の中では正解者が最も多かったですね. 今後は少し簡単にすることも検討してみます.

問題コーナーには初めて応募します. 毎月面白そうな問題が出題されていて感心しております. これからもできたら応募しますのでよろしくお願いします.

各担当者はなるべく面白い問題を出題しようとしているのでそう言っていただけると嬉しいです. こちらこそこれからもよろしくお願いします.

連続であることが使えないかと考えました. 議論がうまくできていると嬉しいです.

連続や単調であることは関数方程式で使うことが多いですね. 議論はうまくできていました.

(くりばやし つかさ
東京大学理学部数学科 4 年)