

ある所に白ヤギと黒ヤギがいる。あるとき白ヤギが黒ヤギに『元気?』という文章の手紙 1 を出した。

以後 2 匹は番号のついた手紙をやりとりし、手紙 n (n は自然数) を相手から受け取ったとき、次の二つのどちらかの行為を等しい確率で行う。

- 手紙 n を読まずに食べた後、『手紙 n と全く同じ文章の手紙をもう一度出してください』と書いた手紙 $n+1$ を相手に出す。
- 手紙 n を読み、手紙 n で指定された文章を新たに手紙 $n+1$ に書き、相手に出す。(ただし、手紙 n が『元気?』なら手紙のやりとりはそこで終了する)

さて、このとき手紙 2009 で手紙のやりとりが終了する確率を求めよ。

解説

こんにちは、第 22 回問題コーナー担当の井上です。

今回の問題は気づいた方も多いかもしれませんが、童謡「やぎさんゆうびん」を題材にしています。2 匹のヤギが手紙を食べるか食べないか選択できるとしたら、手紙がどのように続いていくのだろうかという素朴な疑問から問題が生まれました。正解は $\frac{(2008)!}{2^{2009}(1004)!(1005)!}$ です。うれしいことに延べ 8 人の方が解答を送ってくださり、見事 1 人が正解、3 人が準正解でした。

この問題を解くためには大きく分けて 2 つのステップがあります。一つ目のステップは、手紙のやりとりが 2009 で終わる条件を適切に言い換えて問題を単純化することであり、その単純化した問題を実際に解くのがもう一つのステップです。一つ目のステップは簡単なようで、きちんと解答を書くとなると少し考える必要があったのではないかと思います。見事正解の方も残念ながら不正解であった方も、それぞれの方法で工夫して答案を書いてくれました。

それでは解答例です.

○○○ 解答例

一般に手紙 $2n+1$ までやりとりが続いて手紙 $2n+1$ が『元気?』となる場合を考え, そのような場合の 2 匹の手紙の出し方(食べ方?) が全部で A_n 通りであるとする. このとき求める確率は $(1/2)^{2n+1}A_n$ である. 以下 A_n を求める.

まず準備として手紙 k (k は自然数) の距離 d_k を次のように定義する.

- (1) 手紙 k の文章が『元気?』であるとき $d_k = 0$
- (2) 手紙 k の文章が『手紙 k' と全く同じ文章の手紙をもう一度出してください』であるとき, $d_k = d_{k'} + 1$

このとき定義 (2) により手紙 k が食べられた場合は, $d_{k+1} = d_k + 1$. 一方手紙 k が読まれた場合は, 手紙 k の文章が『手紙 k' と全く同じ文章の手紙をもう一度出してください』であるとして, 手紙 $k+1$ と手紙 k' が同じ文章なので, $d_{k+1} = d_{k'} = d_k - 1$. また, $d_k = 0$ で手紙 k が読まれると, やりとりは終了する(この場合は $d_{k+1} = -1$ と考える)

以上のことより手紙のやりとりが $2n+1$ まで続き, 手紙 $2n+1$ が『元気?』である場合の数 A_n は, 次の 3 つの条件を満たす数列 $d_1, d_2, \dots, d_{2n+1}$ の数に等しいことが分かる.

- (1) $d_1 = 0$
- (2) $d_{k+1} = d_k + 1$, または $d_{k+1} = d_k - 1$
- (3) $k \leq 2n+1$ で $d_k \geq 0$ かつ $d_{2n+1} = 0$

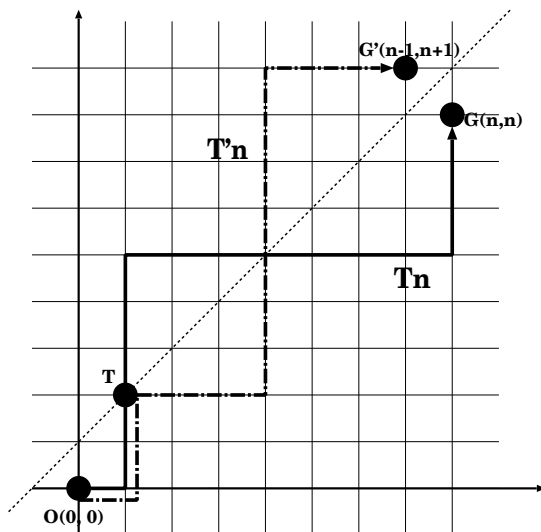
次に A_n を求める. 座標平面上に直線 $x=i, y=i$ (i は全ての整数) をひいて格子をつくる. また原点を O , 点 (n, n) を G とおき, 格子上のみを通して O から G へ行く最短経路のうち $x \geq y$ の部分に含まれるものを経路 S_n と呼ぶことにする. さて原点に点 P があり, $k=1, 2, 3, \dots, 2n$ について, $d_{k+1} = d_k + 1$ ならば点 P は x 方向に 1, $d_{k+1} = d_k - 1$ ならば y 方向に 1 移動すると決めると, 点 P は原点を含めちょうど $2n+1$ 個の格子点を通る. このとき原点から数えて k 個目の格子点の x 座標と y 座標の差が d_k になっていることに注意すると, 上の条件 (2), (3) より常に点 P は $x \geq y$ の部分に含まれ, かつ最終的に点 (n, n) に到達する. つまり点 P の軌跡は経路 S_n を構成する. 逆に任意の経路 S_n から, 上の条件を満たす数列が一つ定まることもわかる. ゆえに $A_n = (\text{経路 } S_n \text{ の個数})$ である.

ここで O から G への格子上的最短経路のうち, 経路 S_n でないものを経路 T_n と呼ぶことにし, 経路 T_n の個数を B_n とおく. O から G への最短経路は ${}_{2n}C_n$ 通りなので, $A_n + B_n = {}_{2n}C_n$. 経路 T_n は直線 $y = x + 1$ と共有点をもつので, そのような共有点のうち x 座標が最小の点を点 T とする. このとき経路 T_n のうち点 T から点 G までの部分を直線 $y = x + 1$ について線対称に折り返せば, 経路 T_n は点 O から点 $G'(n-1, n+1)$ への格子上的最短経路 T'_n になる. 逆に O から点 G' への任意の格子上的最短経路 T'_n について, やはり直線 $y = x + 1$ との共有点が存在するので, 同様の操作を行うことで, それは経路 T_n になる. 異なる経路は折り返しても異なることから, 経路 T_n と点 O から点 G' への最短経路 T'_n は一対一に対応する. そのような最短経路は ${}_{2n}C_{n-1}$ 通りあるので,

$$B_n = {}_{2n}C_{n-1}, \quad A_n = {}_{2n}C_n - B_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

ゆえに求める確率 p は $n = 1004$ のときなので

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} A_{1004} = \frac{(2008)!}{2^{2009}(1004)!(1005)!}$$



この解答例では、まず手紙の距離という概念を定義することで、増加していく手紙の番号を無視し、内容的に『元気?』に近づいているのかどうかのみに注目しています。また、「その手紙から連続何回手紙を読めば『元気?』になるのか」ということを考えても同じことになります。手紙を食べる回数が読む回数以上である限り手紙のやりとりが続くことは直感的にはわかりますが、そのことをきちんと証明しようとするれば、このように帰納的に考えていく必要があるでしょう。

解答の後半では、数列 d_k が何通りあるかを考えるために、格子上の最短経路 S_n, T_n や T_n を折り返した経路 T'_n を考えましたが、この手法はよく用いられるものであり、数理統計の分野では「鏡像の原理」として知られているものです。また、この答えである $A_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ はカタラン数と呼ばれてます。カタラン数はこの他にも様々な問題で登場する数であり、たとえば正 $n+2$ 角形に $n-1$ 本の対角線をひいて n 個の三角形に分割する方法は A_n 通りあります。興味のある人はまた考えてみてください。

■ 感想欄より

(確率過程の一つである)ランダムウォークの問題であることに気付くまでに時間がかかりました。気付けばブラウン運動の確率過程のモデルでは有名な「鏡像の原理」で解決します。

今回の問題は、はじめに述べたとおり、素朴な疑問から生まれた問題でしたが、ご指摘のとおり、確率・統計の分野と深いかわりのある問題となりました。私たちの身の回りには様々な数学が隠れているのだなあと改めて気付かされました。皆さんも日常のふとしたきっかけから数学の問題を考えてみると面白いでしょう。

(いのうえ たくや
京都大学工学部電気電子工学科 2 年)