問題コーナー

第 21 回

松本 雄也

A

2009年 4月10日出題
5月10日締切
6月 7日解説

整数からなる数列が「ほぼ定数」であるとは，ある整数 N が存在して，その数列には N と $N+1$ しか現れないことをいうものとする．

さて，整数からなる数列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ が次の条件をみたすとする．

条件：各 $k=1,2,\ldots,n-1$ に対し，数列 $a_{k+1}-a_1,a_{k+2}-a_2,\ldots,a_n-a_{n-k}$ はほぼ定数である．

このとき，実数 x,y が存在し，各 $i=1,2,\ldots,n$ に対して $a_i=[xi+y]$ となることを示せ．ただし，実数 r に対しその整数部分を $[r]$ で表す．

解説

こんにちは，出題者の松本です．

今回の問題には 3 人から解答があり，うち 1 人が正解でした．正解者の解答を紹介します（いくらか編集してあります）．

◦○◯ 解答例（沖野 赳也さんの解答より）

$1\leqq i<i+k\leqq n$ なる正の整数 i,k に対し開区間 $I_{i,k}$ を

$$I_{i,k}=\left(\frac{a_{i+k}-a_i-1}{k},\frac{a_{i+k}-a_i+1}{k}\right)$$

で定める．これらの開区間すべてに共通する点があることを示せばよい．

実際，共通の点 x_0 が存在したとしよう．（座標平面上の）傾き x_0 の直線であって，ある点 (i,a_i)（$1\leqq i\leqq n$）を通るもののうち y 切片が最小のものを l_0 とし，その y 切片を y_0 とする．l_0 上にはある点 (i,a_i) が存在する．l_0 を y の負の方向に 1 だけ動かしたものを l_1 とする．もし l_1 より下（l_1 上も含む）にある点 (j,a_j) が存在したとすると，$i>j$ の場合，$x_0\in I_{j,i-j}$ ゆえ，$a_i-a_j\geqq x_0(i-j)+1>(a_i-a_j-1)+1=a_i-a_j$ となり矛盾。$i<j$ の場合も同様に矛盾が導かれる．ゆえにすべての i に対し $x_0i+y_0-1<a_i\leqq x_0i+y_0$ が

成り立つ．すなわち題意をみたす x,y として x_0,y_0 がとれる．

次に，一般に 2 個以上有限個の開区間が与えられたとき，それらすべてに共通する点が存在するためには，それらの開区間のうち任意の 2 つが点を共有することを確かめれば十分であることを示そう．区間の個数 N に関する帰納法により示す．$N=2$ の場合は明らか．N のとき成り立つと仮定し $N+1$ の場合を考える．区間を $I_1,I_2,\ldots,I_{N+1}$ とおく．帰納法の仮定により，$I_1,I_2,\ldots,I_N$ は共通の点 x_0 をもつ．I_{N+1} が x_0 を元にもつならばそれでよい．そうでないとする．一般性を失わず I_{N+1} は x_0 より右側にあるとしてよい．各 $i=1,2,\ldots,N$ に対し，I_i と I_{N+1} が共有する点をひとつとると，それは $x_0+\varepsilon_i$（$\varepsilon_i>0$）と書ける．これと $x_0\in I_i$ から I_i は閉区間 $[x_0,x_0+\varepsilon_i]$ を含む．$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N$ のうち最小のものを ε とおくと，$x_0+\varepsilon$ が $I_1,I_2,\ldots,I_{N+1}$ に共通する点である．

以上より，任意の i, j, k, l に対し $I_{i,k}$ と $I_{j,l}$ が点を共有することを示せばよいことがわかった．$k+l$ に関する帰納法によりこれを示す．

$k=l$ の場合を考える．問題文の条件から $\left|\dfrac{a_{i+k}-a_i}{k}-\dfrac{a_{j+l}-a_j}{l}\right|<\dfrac{1}{k}$ となり $I_{i,k}$ と $I_{j,l}$ は点を共有する．

$k\neq l$ の場合を考える．一般性を失わず $k<l$ としてよい．整数 m, k'（$m>0$, $0\leqq k'<k$）を用いて $l=mk+k'$ と書く．問題文の条件より，

$$\begin{aligned}\left|(a_{j+k}-a_j)-(a_{i+k}-a_i)\right| &\leqq 1\\ \left|(a_{j+2k}-a_{j+k})-(a_{i+k}-a_i)\right| &\leqq 1\\ &\vdots\\ \left|(a_{j+mk}-a_{j+(m-1)k})-(a_{i+k}-a_i)\right| &\leqq 1\end{aligned}\tag{1}$$

が成り立つ．一方，$I_{i,k}$ と $I_{j+mk,k'}$ は点を共有する（帰納法の仮定）ので，

$$\left|\frac{a_{j+l}-a_{j+mk}}{k'}-\frac{a_{i+k}-a_i}{k}\right|\leqq\frac{1}{k'}+\frac{1}{k}$$

が成り立つ．両辺を k' 倍することで

$$\left|(a_{j+l}-a_{j+mk})-\frac{k'}{k}(a_{i+k}-a_i)\right|\leqq 1+\frac{k'}{k}\tag{2}$$

を得る．(1) と (2) から，三角不等式を用いて

$$\left|(a_{j+l}-a_j)-\frac{l}{k}(a_{i+k}-a_i)\right|\leqq 1+\frac{l}{k}$$

を得るが，これの両辺を l で割って得られる不等式は，$I_{i,k}$ と $I_{j,l}$ が点を共有す

ることを意味している．

区間 $I_{i,k}$ はすなわち，第 i 項と第 $i+k$ 項の整数部分がそれぞれ a_i, a_{i+k} になるような等差数列の公差としてありうる範囲を表しています．これらの条件がどの 2 つも矛盾しないことを，より小さい場合へうまく帰着して示しています．

次に，出題者の用意していた解答を紹介しましょう．略解に留めますので，細部を詰めるのは意欲ある読者に任せることにします．

◦○○ 別解（出題者による）

数列 $x_1, x_2, \ldots$ に対し，その「k-差分」とは数列 $x_{k+1}-x_1, x_{k+2}-x_2, \ldots$ をさすこととする（この用語は本稿だけのもので，よそでは通用しませんので注意）．1-差分はすなわち階差数列である．

数列の長さ n に関する帰納法で示す．$n=1$ の場合は自明である．

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の 1-差分を $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ とおく．まず，b_i はすべて 0 または 1 であるとしてよい．なぜならば，$\{b_i\}$ はほぼ定数なので，ある整数 N が存在してすべて N または $N+1$ となるが，数列 $\{a_i\}$ の代わりに $\{a_i - Ni\}$ を考えることで，上の場合に帰着できる（この場合に等差数列の整数部分をとった形に書けるならば，元の場合にもそうであることは明らか）．

次に，$b_i + b_{i+1}$（$1 \leqq i \leqq n-2$）はすべて 0 または 1 であるとしてよい．なぜならば，$\{b_i + b_{i+1}\}$ は $\{a_i\}$ の 2-差分なのでほぼ定数であり，$\{b_i\}$ に関する仮定より，すべて 0 または 1 であるか，すべて 1 または 2 であるかのいずれかである．後者の場合，数列 $\{a_i\}$ の代わりに $\{i - a_i\}$ を考えることで，上の場合に帰着できる．

この時点で $\{b_i\}$ に 1 が 1 個以下しか現れないならば，条件をみたす x, y をみつけるのは容易である．2 個以上ある場合を考えよう．$\{b_i\}$ に 2 つの操作

　　初項が 0 でないならば，初項の前に 0 をつけ加える

　　最終項が 0 でないならば，最終項の後に 0 をつけ加える

を施して得られる数列を $\{b'_i\}$ と書く．この数列 $\{b'_i\}$ に対し，操作

　　連続した「0」の並び各々について，「0」の個数を 1 ずつ減ずる

を施して得られる数列を $\{d_i\}$ と書く．すなわち，たとえば $\{b'_i\}$ が

$$0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0$$

だったならば $\{d_i\}$ は

$$0,1,0,0,1,0,1$$

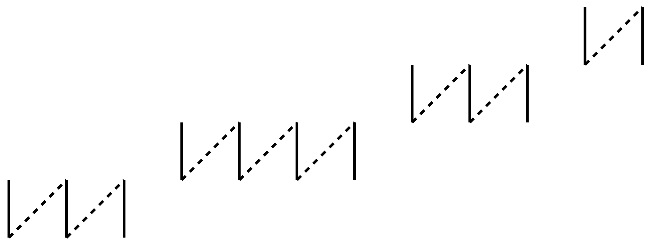
となる．このとき，数列 $\{d_i\}$ は数列 $\{b_i\}$ より短くなる（これは，$\{b_i\}$ に 1 が 2 個以上あることから従う）．

$\{b'_i\}$ を階差にもち初項が 0 となる数列を $\{a'_i\}$ とおき，$\{d_i\}$ を階差にもち初項が 0 となる数列を $\{c_i\}$ とおく．すると，$\{c_i\}$ の k-差分もほぼ定数になることが証明できる（詳細は省略する）．帰納法の仮定より，ある実数 X,Y があってすべての i に対し $c_i=[Xi+Y]$ となる．ここで $x'=\dfrac{X}{1+X}, y'=\dfrac{Y}{1+X}$ とおくと，すべての i に対し $a'_i=[x'i+y']$ となることを示そう．そのためには，各整数 p に対し，$x'i+y'$ が p 以上になることと $X(i-p)+Y$ が p 以上になることが同値になればよいが，

$$\begin{aligned} x'i+y' \geqq p &\iff Xi+Y \geqq (1+X)p \\ &\iff X(i-p)+Y \geqq p \end{aligned}$$

より確かに成り立つ．これを適当に調整することで，$\{a_i\}$ について条件をみたす x,y が得られる．

上の証明では，何を考えてこのような $\{d_i\}$ や x',y' をとり，なぜその結果うまくいったのかがあまり伝わらないと思うので，そのあたりを説明しましょう．上に例として挙げた $\{b'_i\}=\{0,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0\}$ を階差にもつ $\{a'_i\}$ が，等差数列の整数部分をとった形で書けるということは，下図で実線で描かれた線分すべてと（上端点以外で）交わるような直線が存在することと同値です．



ところが，そのためには，上図で点線で描かれた線分すべてと（やはり上端点以外で）交わるような直線が存在すれば十分です．適当な斜交座標を導入する（あるいは顔を 45° 傾げてみる）ことにより，そのような直線が存在することは，$\{d_i\}=\{0,1,0,0,1,0,1\}$ を階差にもつ $\{c_i\}$ が等差数列の整数部分をとった形で書

けることと同値になることがわかります．これを数式の形で表したのが上の別解です．

ちなみに本問は，

- 等差実数列の整数部分をとってできる整数列は，階差がほぼ定数になるという性質をもつ．
- その逆は成り立たない．
- ところで，等差数列の整数部分をとってできる数列については，1-差分（階差数列）のみならず k-差分もほぼ定数になることがわかる（繰り返しますが，この「k-差分」はここだけの用語であり，一般的なものではありません）．
- ではその逆はどうか？

という思いつきから生まれました．

（まつもと ゆうや
東京大学大学院数理科学研究科修士 1 年）