

次の条件をみたす最小の非負実数 α を求めよ.

条件: 任意の非負整数 n に対し, $(2009^n)\alpha$ の小数第一位は 2 か 9 である.

解説

みなさんこんにちは. 第 19 回の問題を担当させていただいた大橋です. 解説の発表が予定より遅れてしまい申し訳ありません.

今回の問題は 2009 年ということで 2009 という数字に固執してみました (笑). 答えは $\frac{4017}{20080}$ です. 比較的簡単な問題だったようで, 4 名の方の応募があったのですが, 全員がこの値にたどり着いていました. またそのうち 3 名の方は, 最小値がその値であることの証明もとても丁寧にできていました. その中には僕が想定していなかった美しい解法も含まれていて, とても楽しみながら読ませていただきました.

僕が想定していた解法は, いわゆる 2009 進法を用いるものです. 問題では $(2009^n)\alpha$ の形を考えるので, α を 2009 進法で表すと簡潔に議論が行えます. まずはそちらの解法を紹介します.

○○○ 解答例 1 重力物体 199 さんの解答より, 一部修正

α が条件をみたすなら α を α の小数部分で置き換えても条件をみたす. したがって $0 < \alpha < 1$ の範囲で考えてよい. $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2009^k}$ と 2009 進法で表す. 任意の自然数 k に対し, a_k は 0 以上 2008 以下の自然数である.

このとき $(2009^n)\alpha$ の 10 進法での小数部分を $f(n)$ とすると, $f(n) = \alpha - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2009^k}$ となり, したがって, $f(n) = \frac{a_n + f(n+1)}{2009} \Leftrightarrow a_n = 2009f(n) - f(n+1)$.

1). また $f(n)$ の 10 進法での小数第一位を $g(n)$ で表す. 問題の条件より任意の自然数 n に対し, $g(n) = 2 \text{ or } 9$ である.

1. $g(n) = 2$ かつ $g(n+1) = 2$ のとき

このとき $0.2 \geq f(n) < 0.3$ かつ $0.2 \geq f(n+1) < 0.3$ より, $a_n > 0.2 \times 2009 - 0.3 = 401.5$ が必要.

2. $g(n) = 2$ かつ $g(n+1) = 9$ のとき

上と同様にして, $a_n > 400.8$ が必要

3. $g(n) = 9$ かつ $g(n+1) = 2$ のとき

上と同様にして, $a_n > 1807.8$ が必要

4. $g(n) = 9$ かつ $g(n+1) = 9$ のとき

上と同様にして, $a_n > 1807.1$ が必要

したがって, $a_1 \geq 401$ が分かる. また $g(1) = 401$ のとき, $f(1) = 2$ かつ $f(2) = 9$ が分かる. したがって $a_2 \geq 1808$ が分かる. このとき $f(3)$ は 2 でも 9 でもよいので, $a_3 \geq 401$ が分かる. その後 m も同様の議論を繰り返すことで, α は k が奇数のとき $a_k = 401$, k が偶数のとき $a_k = 1808$ となる数, すなわち $\alpha = \frac{401 \times 2009 + 1808}{2009^2 - 1} = \frac{4017}{20080}$ 以上であることが分かる.

また $\alpha = \frac{4017}{20080}$ のとき条件をみたすことを示す. この場合任意の自然数 n に対し, $f(2n+1) = f(1)$, $f(2n) = f(2)$ となるので, $f(1)$ と $f(2)$ だけ調べればよい. $f(1) = 0.200049\cdots$, $f(2) = 401.900049\cdots$ より条件をみたすことが示された.

α を 2009 進法で表すことさえ考えれば, あとは a_1 の値から順番に決めていくだけなので, 自然と上記の解答にたどり着けると思います.

それに対し以下の解答は 10 進法と 2009 進法の両方の視点から同時に考えたもので, こちらの方法でも解くことができます.

●○○ 解答例 2 黒川瞬さん, dsk さんの解答より, 一部修正

求める最小値は $\alpha = 0.2 + 0.1 \sum_{k=1}^{\infty} 2009^{-k} (= \frac{4017}{20080})$ である.

まず α がこの値のとき条件をみたすことを示す.

$n = 0$ のとき

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} 2009^{-k} = \frac{1}{20080} < 0.1$$

であるから $0.2 < \alpha < 0.3$ なので α の小数第一位は 2 となる.

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 & 2009^n \alpha \\
 &= 0.2 \times 2009^n + 0.1 \sum_{k=-(n-1)}^{\infty} 2009^{-k} \\
 &= 0.2 \sum_{k=0}^n ({}_{2010}C_k \times 2010^k (-1)^{n-k}) + 0.1 \sum_{k=0}^{n-1} 2009^k + 0.1 \sum_{k=1}^{\infty} 2009^{-k} \\
 &= 402 \sum_{k=1}^n ({}_{2010}C_k \times 2010^{k-1} (-1)^{n-k}) + 0.2 \times (-1)^n \\
 &\quad + 0.1 + 0.1 \sum_{k=1}^{n-1} 2009^k + \frac{1}{20080} \\
 &= 0.2 \times (-1)^n + 0.1 + 0.1 \sum_{k=1}^{n-1} 2009^k + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1) \\
 &= 0.2 \times (-1)^n + 0.1 + \frac{1}{20080} + 0.1 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^k ({}_{2010}C_j \times 2010^j (-1)^{k-j}) \\
 &= 0.2 \times (-1)^n + 0.1 + \frac{1}{20080} \\
 &\quad + 201 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k ({}_{2010}C_j \times 2010^{j-1} (-1)^{k-j}) + 0.1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \\
 &= 0.2 \times (-1)^n + 0.1 + 0.1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1)
 \end{aligned}$$

ただし、式変形の中で $n=1$ のとき $\sum_{k=1}^{n-1} (\dots)$ は合計する項数が 0 なのでその値も 0 であると解釈する。

よって、 n が奇数のときは

$$(2009^n) \alpha = 0.2 \times (-1) + 0.1 + 0.1 \times 0 + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1) = 0.9 + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1)$$

となり、 n が偶数のときは

$$(2009^n) \alpha = 0.2 \times 1 + 0.1 + 0.1 \times (-1) + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1) = 0.2 + \frac{1}{20080} (\text{mod}.1)$$

となり、いずれの場合も条件を満たす。

次に α がこの値より小さいときに条件をみたさないことを示す。 $a_{-1} = 0, a_0 = 0.2, n \geq 1$ のとき $a_n = 0.2 + 0.1 \sum_{k=1}^n 2009^{-k}$ と定義する。このとき a_{m-1} 以上 a_m 未満、という分類は 0 以上 $\frac{4017}{20080}$ 未満の実数をすべて網羅するが、このとき、

(2009^m) α の小数第一位は, 上と同様に考えることで, m が奇数ならば 1, m が偶数ならば 8 となり, 条件をみたさない.

以上より示された.

最後にこれはどちらの答案でもしっかりできていることですが, 一般にある数が最小値であることを示すには, その値が条件をみたすことと, その値未満の値では条件をみたさないことの二つを説明する必要があることに注意しましょう.

■ 感想欄より

簡単だった

内容的には, 今回は大学入試に出して良いくらいに簡単だったと思います.

僕はそこまで簡単だとは思わないのですが, あっさり解かれてしまったようで残念です (笑). ちなみに実はこの問題は, 昔の東工大の入試問題の自然数 n に対し, $(2^n)\alpha$ の小数部分が, n が奇数のときに 0.5 以上, 偶数のときに 0.5 未満となる α を求めよ. という問題を改題したものでした. こちらもあっさり見抜かれてしまったようです (笑).

かなり難しかったです. 説明不足の気もしますが限界です (汗)

人によって得意分野苦手分野がありますし, 自分ごときの作った問題が解けようが解けまいが, 人生にはなんら影響ありません. 落ち込まずに次回もまた気楽に挑戦してみてください.

(おおはし ゆうた
東京大学理科一類 2 年)