問題コーナー

第 18 回

伊藤 佑樹

A

2009年 1月10日出題
2月10日締切
3月20日解説

実数に対して定義され，実数値をとる関数 f であって，任意の実数 x,y に対して

$$f(x^2)+f(xy)=f(x)f(x+y)$$

をみたすものをすべて求めよ．

解説

こんにちは, 第 18 回問題コーナー担当者の伊藤です. 問題に取り組んでいただいた皆様, ありがとうございました.

今回は第 15 回に続き, 数学オリンピックではよく出題される関数方程式からの出題でした. 本問の解は, $f(x)=0, f(x)=2, f(x)=x$ です. いくつかの場合分けをはさみながら, 解がこれら 3 つに限ることを示していきます. それでは, 解答に入りましょう.

◦○○ 解答例 (戒律王ゾディアークさんの解答より)

与式

$$f(x^2)+f(xy)=f(x)f(x+y) \tag{$*$}$$

を考える.

$(*)$ に $x=y=0$ を代入することで $2f(0)=\bigl(f(0)\bigr)^2$ が得られ, これより $f(0)$ は 0 または 2 である.

まず, $f(0)=2$ のときを考える. t を任意の実数とし, $(*)$ に $x=0,y=t$ を代入して,

$$2f(0)=f(0)f(t)$$

が得られる. t は任意にとった実数なので, $f(x)=2$ である. また, これは $(*)$ をみたす.

次に, $f(0)=0$ のときを考える. $x=t,y=0$ を $(*)$ に代入して,

$$f(t^2)=\bigl(f(t)\bigr)^2 \tag{1}$$

を得る. $x=t, y=-t$ を $(*)$ に代入して, $f(t^2)+f(-t^2)=0$ を得る. これより, 任意の実数 u に対して

$$-f(u)=f(-u) \tag{2}$$

が成り立つ. p,q を任意の正の数とし, $x=p, y=-p+q$ を $(*)$ に代入して,

$$f(p^2)+f(-p^2+pq)=f(p)f(q)$$

を得る. (2) より,

$$f(p^2)-f(p^2-pq)=f(p)f(q) \tag{3}$$

が成り立つ. (1) より, $t \geqq 0$ に対し $f(t) \geqq 0$ であるので, $f(p^2)-f(p^2-pq) \geqq 0$ である. p,q は任意にとったので, $x>0$ に対して f は単調増加関数である. また, $t \geqq 0$ に対し $f(t) \geqq 0$ であること, $f(0)=0$ であること, (2) より, 実数全体で f は単調増加関数である.

$(*)$ に $x=1, y=0$ を代入して,

$$f(1)=\bigl(f(1)\bigr)^2$$

を得る. これより, $f(1)$ は 0 または 1 である.

- $f(1)=0$ のとき.
  v を任意の実数とし, $(*)$ に $x=1, y=v$ を代入して, $f(v)=0$ を得る. v は任意にとったので $f(x)=0$ であり, これは $(*)$ をみたす.
- $f(1)=1$ のとき.
  $(*)$ に $x=1, y=v$ を代入して,
  $$1+f(v)=f(1+v) \tag{4}$$
  を得る. これと $f(1)=1$ であることより帰納的に, 任意の整数 n に対して $f(n)=n$ が成り立つ. $(*)$ に $x=n, y=v$ を代入して, $n^2+f(nv)=nf(n+v)$ を得る. これと (4) より,
  $$n^2+f(nv)=n\bigl(n+f(v)\bigr)$$
  が成り立ち,
  $$f(nv)=nf(v)$$
  を得る. これより, 任意の有理数 $r=\dfrac{b}{a}$ (a,b は整数) に対し
  $$f(r)=\frac{f(ar)}{a}=\frac{b}{a}=r$$
  となる.

ここまでで, $f(0)=2$ の場合と $f(0)=f(1)=0$ の場合に関しては示されました. 残った $f(0)=0, f(1)=1$ の場合に関しても有理数の場合に f がどのような値をとるかについては分かりました. f が無理数に対しどのような値をとるかは直接的には分かりにくいのですが, ここでは上で示した f の単調増加性が鍵となります.

◦○○ **解答例の続き**

このとき, 任意の実数 α に対し $f(\alpha)=\alpha$ となることを示す. $f(\alpha)>\alpha$ となったと仮定する. α より大きな有理数 $\dfrac{b}{a}$ (a,b は整数) であって, $f(\alpha)$ より小さいものがとれる. しかし, $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{b}{a}$ であるのでこれは f の単調増加性に矛盾する. $f(\alpha)<\alpha$ とした場合も同様にして矛盾が導かれる. よって, 任意の実数 α に対し $f(\alpha)=\alpha$ が成り立つことが示された. そして, $f(x)=x$ は $(*)$ をみたす.

以上より求める解は, $f(x)=0, f(x)=2, f(x)=x$ である.

というわけで, 証明が完了しました. ここでは, 有理数の稠密性と f の単調増加性をあわせることで f が無理数に対してどのような値をとるかが分かりました. このように, まずは有理数に対して f がどのような値をとるかを示し, それを有理数の稠密性を用いて実数全体に広げて考えるというのは関数方程式ではよく見られる手法なので, ぜひ覚えておいてください. 関数方程式の手のつけ方については第 15 回の解説で詳しく触れられているので, 気になる方はぜひ見てください.

その他の解法としては, f が定数関数でない場合に f が単射であることから有理数の場合に $f(x)=x$ であることを示しているものや, $f(1)$ の値で場合分けせずそこで $f(nx)=nf(x)$ を示しているものがありました.

感想欄より

今回は比較的簡単でした.

割りと考えやすかったです.

今回は割ととっつきやすめな関数方程式を想定して出題したので, そう感じていただいてよかったです.

このサイトを今日見つけ、早速トライ！！でも合ってるかどうかは自信ないです...(汗) これからも頑張っていこうと思いますのでよろしくお願いします。

ご応募ありがとうございます. 次回以降もぜひ頑張ってください.

直前で解き始めたので TeX を勉強する余裕がありませんでした. 読みづらいでしょうがお願いします.

TeX は便利なので, 使えるようになるといいと思いますよー.

(いとう ゆうき
東京大学理科三類 2 年)