問題コーナー

第 17 回

吉田 雄紀

G

2008年12月10日出題
2009年 1月15日締切
2月12日解説

次の条件をみたす整数の組 (n,m) をすべて決定せよ.

- $3 \leqq n, 0 \leqq m \leqq n$.
- 180° より大きな内角をちょうど m 個もつ n 角形であって, 有限個の凹四角形に分割することができるようなものが存在する.

ここで, 凹四角形とは 180° より大きい内角を少なくとも一つもつ四角形のことをいう.

こんにちは. 第 17 回問題コーナー担当者の吉田です. 問題に取り組んでくださった皆様, ありがとうございました.

ではさっそく, 今回の問題の解答にうつりたいと思います.

答えは $4 \leqq n, \left[\dfrac{n-1}{2}\right] \leqq m \leqq n-3$ をみたす整数の組 (n,m) 全体になります. すなわち, 求める (n,m) の組全体の集合を S とおくと

$$S = \left\{(n,m) \mid 4 \leqq n, \left[\frac{n-1}{2}\right] \leqq m \leqq n-3\right\}$$

となります.

証明は, 大きく次の 2 つのステップに分かれます.

(1) それらの数の組しかありえないこと, すなわち S が右辺に含まれることを証明する

(2) それらの数の組に対応するような凹四角形が存在すること, すなわち S が右辺を含むことを証明する

(1) を証明できていた人は残念ながら一人もいませんでした. 一方, (2) は証明できていた人がいました. では, それぞれの証明をみてみましょう.

(1) それらの数の組しかありえないこと.

◦○○ 解答例

以下, 180° より大きな角のことを凹角, 180° より小さな角のことを凸角ということにする. また, 内角についていう場合は凹内角, 凸内角などとも表現する. いま, N 個の凹四角形を用いて実際に凹内角を m 個もつ n 角形が作れているとする.

まず, n 角形の内角の和は $180(n-2)^\circ$ であるので, それらの中に凹角は $n-2$ 個以上は含むことができない. したがって $m \leqq n-3$.

さて, N 個の凹四角形いずれかの頂点が存在するような n 角形の内部と境界上の点について考える. これらを以下のように分類する：

(a) いくつかの凹四角形の凸角ばかりが集まってきていて, その点の周囲全体がそれらの角によって取り囲まれているような点 (すなわち集まってきている角の和は 360° である)

(b) 1 つの凹四角形の凹角と, いくつかの凹四角形の凸角が集まってきていて, その点の周囲全体がそれらの角によって取り囲まれているような点 (集まってきている角の和は上に同じ)

(c) いくつかの凹四角形の凸角が集まってきていて, その点の周囲 180° の範囲のみがそれらの角によって取り囲まれているような点 (このタイプの点は n 角形の境界上だけでなく内部にも存在しうる)

(d) 凹四角形の凸角ばかりが集まってきているような, n 角形の頂点 (その点での n 角形の内角は凹内角でも凸内角でもよい)

(e) 1 つの凹四角形の凹角と, いくつかの凹四角形の凸角が集まってきているような, n 角形の頂点

(f) 1 つの凹四角形の「側面」と, いくつかの凹四角形の凸角が集まってきているような n 角形の頂点

タイプ a,b,c,d,e,f の点の数をそれぞれ a, b, c, d, e, f とおく. すると,

- タイプ a,b,c,d,e,f の点に集まってきている凹四角形の内角たちの和は, それぞれ (a)360°, (b)360°, (c)180°, (d)その点での n 角形の内角, (e)その点での n 角形の内角, (f)その点での n 角形の内角 -180° である. したがって, N 個すべての凹四角形の内角の和を足し合わせると $360N = 360(a+b)+180c+180(n-2)-180f$ であることがわかる.
- N 個すべての凹四角形の凹内角の数を数えると, $N = b+e$ であることがわ

かる.

- n 角形の凹内角がある頂点は m 個だが, タイプ e, タイプ f の点は全て m 個の点のうちのどれかである. したがって $e+f \leqq m$ である.

このとき, $m \geqq e+f = N-b+f$ であるが, 1 つ目の式より $2N-2b+f = 2a+c+n-2$ であるので

$$\begin{aligned} m &\geqq N-b+f \\ &\geqq \frac{2N-2b+f}{2} \\ &\geqq a+\frac{c}{2}+\frac{n}{2}-1 \geqq \frac{n}{2}-1 \end{aligned}$$

である. m は整数であるので $m \geqq \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ となる. よって示された.

最初にすべての点を分類してしまうところがポイントです. それらの個数について関係式を立ててやり, あとは m をなるべく下から評価しようとしていけば, 上の解答にたどり着くと思います.

では, (2) の証明をみてみましょう.

(2) それらの数の組に対応するような凹四角形が存在すること.

◦○◯ **解答例（dsk さんの解答より, 一部修正）**

求める (n,m) からなる集合を S とすると $(4,1) \in S$ となるのは自明. また, $m \geqq 1$ とし, $(n,m) \in S$ とすると, $(n+1,m+1),(n+2,m+1) \in S$ となる.

$(n+1,m+1) \in S$ となることの証明

凹となる頂点が m 個ある n 角形の凹となる頂点の 1 つを B とし, その両隣の頂点を A, C とする. また, AB の中点を D とし, 三角形 DBC の内部に点 E を十分辺 BC の近くにとって角 ECB を小さくする. こうしてつくられた凹四角形 $DBCE$ を元の n 角形に追加した多角形を考えると, 元より頂点 D, E が追加され, 頂点 B が消滅しているので $n+1$ 角形となる. これらの 3 つの頂点はすべて凹となる頂点であるから, 合計で凹となる頂点は 1 つ増える. また, これら以外にも頂点 C の内角が増加するが, 角 ECB を小さくしたのでこの増加によって頂点 C の凹凸が変化することはない. よってこの図形は凹となる頂点を $m+1$ 個もつ

$n+1$ 角形であり, $(n+1,m+1)\in S$ となる.

$(n+2,m+1)\in S$ となることの証明

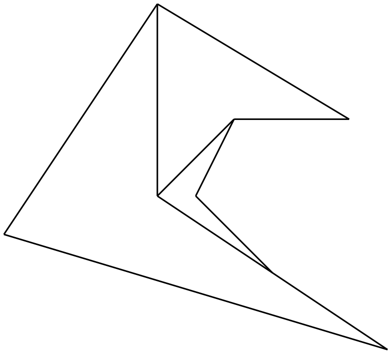
凹となる頂点が m 個ある n 角形の凹となる頂点の 1 つを B とし, その両隣の頂点を A, C とする. 三角形 ABC の内部に点 D を辺 AB の十分近くにとって角 DAB が小さくなるようにする. 次に三角形 DAB の内部に点 E をとり, 凹四角形 $DABE$ を元の n 角形に追加した多角形を考える. 元より頂点 D, E が追加されたので $n+2$ 角形であり, 点 D は凹でなく, 点 E は凹である. また, 頂点 A と B の内角が増加しているが, 角 DAB が小さくなるようにしたので頂点 A の凹凸に変化はなく, 頂点 B はもともと凹であるから内角が増加しても凹のままである. 以上よりこの図形は凹となる頂点を $m+1$ 個もつ $n+2$ 角形であり, $(n+2,m+1)\in S$ となる.

以上より, 任意の整数 $0\leqq p\leqq q$ に対して, $(4,1)\in S$ と命題「$(n,m)\in S$ ならば $(n+1,m+1)\in S$」を $q-p$ 回, 命題「$(n,m)\in S$ ならば $(n+2,m+1)\in S$」を p 回, 適用することにより, $(4+p+q,1+q)\in S$ となる. よって

$$\begin{aligned} S &\supset \{(4+p+q,1+q) \mid 1\leqq p\leqq q\} \\ &= \left\{(n,m) \mid 4\leqq n, \left[\frac{n-1}{2}\right]\leqq m\leqq n-3\right\} \end{aligned}$$

となる.

この証明では, 既にできている n 角形に十分小さな凹四角形を「くっつける」ことによって $(n,m)\in S \Rightarrow (n+1,m+1),(n+2,m+1)\in S$ を示しています. そして, このことと $(4,1)\in S$ であることより, S が右辺の集合をすっかり含んでしまうということが帰納的に示されています. 参考までに, この証明の方法で構成した $(n,m)=(7,3)$ の例を載せておきます.



今回の問題では, 実際に紙の上でさまざまな凹四角形を描いて組み合わせていく過程で, 結構楽しめるのではないかと思います. たとえば, 凹四角形を組み合わせて凸多角形を作ろうとしてみて下さい. 凹角をなくそうとして凹四角形をかぶせると, 別の場所に凹角ができてしまい, それをなくそうとすると, また別の場所に凹角ができてしまい, …… と, いたちごっこになることでしょう.

なお, 余談ですが, もともとこの問題を思いつくに至った経緯として「正方形を, いくつかの鋭角三角形に分割する. 最小でいくつの三角形に分割することができるか？」という問題がありました. 余力のある方は考えてみてください.

感想欄より

> もう少し考えた方が良いと思いつつ, 送信します.

まだ考えが途中であったり, 不完全なものであったりしても, 送ってしまえばよいと思います. 1 通でも多くの応募があると, 担当者は嬉しいものです.

> 逆側については, たとえば有限個の凹四角形で三角形が作れないことすら証明できませんでした.

各々の凹四角形が「自身の凹内角を埋めるのに必要なだけの凸内角」しかもっていないため, 凸多角形を作れないことは (上の解答例よりも) もう少しあっさりと説明がつきます.

$\left(\begin{array}{l}\text{よしだ ゆうき}\\ \text{東京大学理科三類 1 年}\end{array}\right)$