問題コーナー

第 15 回

西本 将樹

A

2008年10月10日出題
11月10日締切
12月 8日解説

実数値に対して定義され, 実数値をとる関数 $f(x)$ であって, 任意の実数 x,y に対して

$$f\bigl(f(x)-y\bigr)+f(2x)y=f(x^2+y)$$

が成り立つようなものをすべて決定せよ.

解説

今回は数学オリンピックの分野の 1 つである関数方程式からの出題です. 関数方程式の問題は, 似ている問題でもいつでも同じように解けるというわけではありませんし, どのように考えればいいのかさっぱりわからないという人も多いと思います. しかしある程度はどの問題にも共通する考え方があり, 一度コツをつかめば比較的手をつけやすい分野の 1 つだと思います. 本問の解説に入る前に, 関数方程式の問題の一般的な考え方を筆者なりに少し紹介してみることにしましょう.

(1) 答えの予想.

解となる関数がどのような形をしているかを予想しておくことで, 方針を立てる役に立ったり, 誤った議論を発見できることがあります. 数学オリンピックの関数方程式の問題では, 解となる関数は簡単な多項式関数や有理関数の場合が多く, 簡単な関数が実際に方程式を満たすかどうかを調べることで解の予想が立てられることが多くあります. また, 解が複数あったり, パラメータを用いて表される場合も多いです. 1 つの解を定数倍したり定数を加えたものが, 再び解となるかなどに注意することで, 解を見落としにくくなるでしょう.

(2) どのような値を代入するか.

関数方程式を解く際には, ある変数に具体的な値や他の変数の式を代入することで情報を引き出していくことになります. しかし, 手当たり次第にあらゆる代入を行ってもなかなか意味のある結果を得ることはできません.

代入のコツとしては, ある項が 0 になるようにしたり, 複数の項が打ち消しあうようにすることが挙げられるでしょう. これにより元の関数方程式よりもわかりやすい条件を得ることができます. $f(a)=0$ なる a に注目することである項が 0 になるようにしたり, $f(a)=f(b)$ となる a,b に注目することで項を打ち消しあうように上手い代入を考えましょう.

後で紹介する本問の解答では $y=\dfrac{f(x)-x^2}{2}$ という代入を行っていますが, これは左辺の $f\bigl(f(x)-y\bigr)$ と右辺の $f(x^2+y)$ が打ち消すように y の値を調整したものです.

(3) 場合分け.

適切な場合分けをすることで議論を進めやすくなることがあります. 特に複数の解がある場合などは, 解が 1 つに決まるように場合分けをすると議論を進めやすくなります.

場合分けでは, $f(a)=0$ となる a がどのくらいあるのかに注目したものや, $f(a)=f(b)$ となる a,b がどのくらいあるのかに注目したものが多くあります.

他にもよく用いられる手法はいくつかあります. 数学オリンピックの過去問にも関数方程式の問題はたくさんありますので, それらを解いたり解説を読んだりすることで経験値を積めば, 自然と色んな手法が身についていくと思います.

さて, それでは本問の解説を始めましょう. 本問の解は $f(x)=0$, $f(x)=x^2$ の 2 つです. これらが条件をみたすことは容易に確かめることができます. 逆に条件をみたす関数がこの 2 つに限ることを証明するのが難しいところです. では解答を紹介していきましょう.

∘○◯ **解答例**

条件式で $y=\dfrac{f(x)-x^2}{2}$ として整理すると $f(2x)\left(\dfrac{f(x)-x^2}{2}\right)=0$ となる. よって任意の実数 x に対して

$$f(2x)=0 \text{ または } f(x)=x^2$$

が成り立つことがわかる. 特に $x=0$ の場合を考えることで $f(0)=0$ を得る. さらに, 条件式に $x=0$ を代入することで, $f(-y)=f(y)$ が成り立つことがわかる.

ここで次の 2 つに場合分けをする：

> - 任意の $x \neq 0$ に対して $f(x) \neq 0$ であるとき.
> - ある $x \neq 0$ に対して $f(x) = 0$ であるとき.
>
> 前者の場合は最初に得たことより $f(x) = x^2$ であることがわかる. 後者の場合に $f(x) = 0$ であることを示そう.
>
> 仮定より $f(a) = 0$ なる $a \neq 0$ がとれる. このとき $f(a) \neq a^2$ なので $f(2a) = 0$. よって条件式に $x = a$ を代入することで $f(-y) = f(a^2 + y)$ を得る. 左辺は $f(y)$ に等しいので, f は a^2 を周期にもつ周期関数である.
>
> さて, 条件式に $y = 0$ を代入した式と $y = a^2$ を代入した式
> $$f\big(f(x)\big) = f(x^2), \qquad f\big(f(x) - a^2\big) + f(2x)a^2 = f(x^2 + a^2)$$
> と, f が a^2 を周期にもつ周期関数であることにより, $f(2x)a^2 = 0$ であることがわかる. $a \neq 0$ なので $f(2x) = 0$ であり, これが任意の実数 x について成り立つことより f が恒等関数 0 であることがわかる.

この解答例以外にも議論の進め方はあります. 今回の問題で見事正解した 2 人の方は 2 人とも, 場合分けをした後で解答例とはまた違った議論で解いてくれました.

なお, 解答例では $y = \dfrac{f(x) - x^2}{2}$ を代入することで「$f(2x) = 0$ または $f(x) = x^2$」という結果を証明しましたが, 他の方法もあったので紹介しておきます：

◦○○ dsk さんの解答より

> 与式で $y = -x^2$ および $y = f(x)$ を代入して得られる式
> $$f\big(f(x) + x^2\big) - f(2x)x^2 = f(0),$$
> $$f(0) + f(2x)f(x) = f\big(x^2 + f(x)\big)$$
> の辺々を加えて整理することで $f(2x)\big(f(x) - x^2\big) = 0$ を得る. したがって任意の実数 x に対して $f(2x) = 0$ または $f(x) = x^2$ が成り立つ.

また, 今回の問題で「任意の x に対して $f(2x)\left(\dfrac{f(x) - x^2}{2}\right) = 0$」という結果から「解は $f(x) = 0,\ f(x) = x^2$」と結論付けている解答が複数見受けられましたがこれは誤った議論です. 各実数 x に対して $f(2x) = 0$ または $f(x) = x^2$ のいずれかが成り立つことがわかるだけで,「すべての x に対して $f(2x) = 0$」や「すべての x に対して $f(x) = x^2$」が成り立つことはいえません. $x = 1$ に対しては $f(2x) = 0$ だけれ

ども $x=-1$ に対しては $f(x)=x^2$ の方である, といったことが起こり得るのです. このように「数 x を代入したものについて成り立つ事柄」と「関数について成り立つ事柄」は混同しやすいので注意してください.

感想欄より

直感的に $f(x)=0$ or $f(x)=x^2$ であることは分かるのですが, $x\in A$ のときに $f(x)=0$ で $x\notin A$ のときに $f(x)=x^2$ というパターンが無いことが証明できるまでに時間がかかりました.

直感的になりそうでもちゃんと証明するのが大変なことって多いですよね. ある性質が実数の一部分で成り立つことがわかっているときに, 実数全体で成り立つことをどうやって示せばいいのかというのは関数方程式の問題で一番悩む部分だと思います.

最近このサイトを見つけました. 次回から本格的に戦っていこうと思いますので, よろしくお願いします.

こちらこそよろしくお願いします. 月に 1 問のペースで出題されるので, これからも楽しんでいってください.

(にしもと まさき
東京大学理学部数学科 4 年)