問題コーナー

第 14 回

三谷 明範

C

2008年 9月10日出題
10月10日締切
11月10日解説

n, m を正の整数とする. $n \times m$ の長方形の部屋のなかに長さ 1 の衝立をいくつかおいて迷路を作る. ただし, 衝立の置き方は, この部屋の中に一辺 1 の正方形 $n \times m$ 個を敷き詰めたときにそれらの一辺と重なるようにするものとする. このとき, 次の条件をみたすために必要な衝立の数を求めよ.

(1) いくつか衝立を選んで, それらが他の衝立や壁と接していないようにはできない.

(2) 上記の正方形 4 個からなる一辺 2 の正方形をとれば, その内部に少なくとも一つ衝立がある.

(3) いくつかの衝立によって, 部屋が二つに分けられてしまうことはない.

解説

今回は正解者が一名, また他に答えは出してくれた人 (準正解者) が二名いました. 答えだけ書いてくれた方がいたのですが, 今回は答えだけではなくその証明も要求しているつもりだったので答えがあっているだけでは準正解としました. あまり若い方が応募してくれることを想定しておらず, 問題に明記していませんでしたが, 数学の問題では基本的には証明も要求されると思っておいてください. 今後も他の問題がでますのでぜひ挑戦してみてください.

今回はいろいろ実験して楽しめるような, 簡単なグラフの問題を出題してみました. グラフとは, いくつかの頂点と, それらの間を結ぶ辺からなる図形のことです. 例えば, いくつかの空港の間に直行便がある, というような問題や, 何人かの人がいて互いに何度か握手したというような問題は, 空港や人を頂点, 直行便があることや握手したことを頂点を結ぶ辺としてとらえることで, グラフの言葉に置き換えることができます. このような問題をグラフの言葉に置き換えると考えやすくなることがよくあります.

さて, 今回の問題は, 普通に考えると迷路をつくる衝立を辺として考えればよいように思われます. 実際にそのようにして解いてくれた方もいましたが, まわりの壁と接している衝立と, そうでない衝立を分け, そうでない衝立のなかで互いに接している部分に分ける, といったことを考えていくことになります. しかし, ここでは $n\times n$ 個ある正方形の部分を頂点とし, 互いに接している正方形の間に衝立があるときにそれらの間に辺があり, 衝立がないときに辺がないようなグラフを考えると, 条件がかなり簡単になります.

◦○◯ **証明**

$n\times n$ 個ある正方形の部分を頂点とし, 互いに接している正方形の間に衝立があるときにそれらの間に辺があり, 衝立がないときに辺がないようなグラフを考えと, このグラフは次の条件をみたす.

(1) ある頂点からある頂点へはいくつかの辺を通って行くことができる.

(2) ある頂点から, 同じ辺を二度通らずに, いくつかの辺を通って同じ頂点に戻ってくることはできない.

(1) は, 問題文の条件 (3) と (1) から示される. また, (2) は (1) と (2) から示される.

次の補題を示す.

補題 頂点の数が m 個 (m は正の整数) であるグラフが上記の条件をみたすとき, 辺の数は $m-1$ 本になる.

証明 m についての数学的帰納法で示す. まず $m=1$ のときの成立は明らか.

次に $m=k$ のときの成立を仮定して $m=k+1$ の場合を示す. 頂点が $k+1$ 個のグラフが上記の条件をみたしているとき, 頂点の数が有限であること, また, (2) から, ちょうど一本の辺の端点となっている頂点がある. この頂点と, この頂点を端点とする辺を取り除いた頂点の数が k 個のグラフを考えれば, このグラフも上記の条件をみたし, 帰納法の仮定から辺の数は $k-1$ 本となる. よって, もとの頂点が $k+1$ 個のグラフの辺の数は k 本となり, $m=k+1$ の場合の成立が示された.

以上より, m を正の整数として, 頂点が m 個のグラフが上記の条件をみたすとき, そのグラフの辺の数は $m-1$ 本となる. ■

この補題を用いると, 部屋の内部で衝立をおきうる場所, 合計 $2n(n-1)$ 箇

所のうち, 衝立のおかない場所は n^2-1 箇所であり, よって衝立の最小個数は $2n(n-1)-(n^2-1)=n^2-2n+1$ 個となり, また具体的にこれだけの衝立を利用して題意をみたす迷路をつくれることは明らか. よって求める答えは n^2-2n+1 個となる.

この証明の後半で用いている(1), (2)をみたす (頂点の数が有限な) グラフのことを「木」と呼び, 今回用いた頂点の数と辺の数の関係はよく知られています. 実際に題意の条件をみたす衝立の配置をいくつか作っていくうちに, 衝立の数が変わらないことに気づき, さらに, 衝立ではなく, 通れる部分に注目するときれいな形になっていることに気づいてもらえると良かったかなと思います.

感想欄より

グラフ理論の問題ですね。単純無向グラフについて知っていれば比較的簡単かと思います。

そういうつもりの出題でした。

ちなみに、単純グラフというのは、両端点が一つの頂点になっている辺や、二つの頂点の間に複数の辺があるような状況がないグラフのことです。また、無向グラフというのは辺の向きを考えないグラフで、逆に辺の向きを考える有向グラフというものもあります。今回は一番簡単な形のグラフの出題でしたが、みなさんも興味があれば他のグラフのことについても調べてみてください。

いろいろと実験していけたのが楽しかったです。答え自体は合っていると思いますが、解法に自信がないです。

ありがとうございます. 実験していくと答えはすぐわかると思うのですが, そこからどう証明するか? というところで慣れていないと詰まってしまったようです. 帰納的に示す方針でも示すことはできるのですが, たとえば一行のぞいた時も問題文の条件をみたすのか, といったようなことをもっと細かく考える必要があります. また, 片方の向きの衝立しか考えられていませんでしたが, 横向きの衝立も考えなくてはいけません. ただ証明を修正するのはそこまで難しくないので, 実際に図を

描きながら自分の証明ですべてが示されてるかを確かめながらもう一度考えてもらえるといいと思います.

> 青森の数学に飽き、この数学オリンピックのホームページをみていたら、ここの問題を見つけました。

また他の問題が出題されていくので、ぜひチャレンジしてみてください。

(みたに あきのり
東京大学医学部 3 年)