問題コーナー

第 11 回

大橋 祐太

C

2008年 5月10日出題
6月10日締切
7月25日解説

みなさんこんにちは. 第 11 回の問題を担当した大橋です.

今回の問題は一見単純な数列の問題に見えますが, a_n と b_n の挙動が規則的でなく, いざ書き出してみるとなかなか大変な問題です. 答えは $a_{2008} = 2546$ です. 3 名の応募があり, そのうち 2 名の方が正解でした. 1 人はプログラムを書いて a_{2008} を求め, (僕はそのようなプログラムが一切かけないのですごく羨ましいです) もう 1 人は数列を具体的に書き出したときに分かる性質や規則を 1 つ 1 つ丁寧に証明していって, 数列の途中の項をいくつか経由して a_{2008} の値にたどりついていました. とても丁寧な答案で読みやすかったです. まずはそちらの解答を紹介します.

解答例 1　dsk さんの解答より. 一部修正

正の整数を $\mathbb{N}^+$ と書き、集合 A_n を

$$A_n := \bigcup_{m=1}^{n} \{a_m, b_m\}$$

と定義しておく。このとき任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対して $a_{n+1} = \min(\mathbb{N}^+ \setminus A_n)$ である。このとき, $\mathbb{N}^+ \setminus A_n \supset \mathbb{N}^+ \setminus A_{n+1}$ なので, $a_n \leqq a_{n+1}$. さらに $a_n \neq a_{n+1}$ より $a_n < a_{n+1}$ なので, $\{a_n\}$ は狭義単調増加である.

次に、以下の補題を証明する。

補題 1. 任意の正の整数 n に対して

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n + 1, b_n + 5) \text{ または } (a_n + 2, b_n + 4)$$

が成立する。

証明. 証明は数学的帰納法による。

まず、$n \leqq 1$ での成立を証明する。問題の条件より順に、$a_1 = 1$、$b_1 = 5 - a_1 = 4$、$a_2 = \min(\mathbb{N}^+ \setminus \{1, 4\}) = 2$, $b_2 = 11 - a_2 = 9$ であるから、$(a_2, b_2) = (a_1 + 1, b_1 + 5)$ となり、補題は成立している。

次に $n \leqq k (k \geqq 1)$ での成立を仮定するとき、$n = k + 1$ での成立を証明する。既に見たように $\{a_m\}$ は狭義単調増加であるから $a_{k+1} \geqq a_k + 1$ である。次に $m \in \mathbb{N}^+$ で $b_m = a_k + 1$ を満たすものが存在するかどうかで場合分けする。

（1）存在しない場合

$a_k+1 \notin A_k$ であるから $a_{k+1} = \min(\mathbb{N}^+ \setminus A_k) \leqq a_k+1$ であり、従って $a_{k+1} = a_k+1$ となる。

（2）存在する場合

帰納法の仮定から $n \leqq k$ の範囲では $a_n < b_n$ なので, $b_k \geqq a_k+1$. すなわち $m \leqq k$ より $A_k \ni a_k+1$. したがって $a_{k+1} \geqq a_k+2$ である。また、$l \in \{1, \ldots, m-1\}$ のとき $b_l \leqq b_m-4 = a_k-3$ であり、$l \in \{m+1, \ldots, k\}$ のとき $b_l \geqq b_m+4 = a_k+5$ であるから、$A_k+2 \notin A_k$ となる。よって $a_{k+1} = \min(\mathbb{N}^+ \setminus A_k) \leqq a_k+2$ であり、したがって $a_{k+1} = a_k+2$ となる。

以上より、$a_{k+1} = a_k+1, a_k+2$ であり、$(a_{k+1}+b_{k+1}) - (a_k+b_k) = 6(k+1)-1-(6k-1) = 6$ であるから $b_k+1 = b_k+6-(a_{k+1}-a_k)$ となる。よって

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k+1, b_k+5) \text{ または } (a_k+2, b_k+4)$$

となり $n = k+1$ での成立が言える。 □

次に、以下の補題を証明する。

補題 2. 数列 $\{a_m\}$ 及び $\{b_m\}$ に含まれる数に重複はない。すなわち任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対して A_n の元の数は $2n$ である。

証明. 補題 1 より $\{a_m\}$ 及び $\{b_m\}$ は狭義単調増加であるから、補題の不成立を仮定すると、ある $m, n \in \mathbb{N}^+$ に対して $a_m = b_n$ となる。補題**??**より、$a_m \leqq 2(m-1)+a_1 = 2m-1$、$b_n \geqq 4(n-1)+b_1 = 4n$ であるから $m > n$、よって $m-1 \geqq n$ である。したがって、$a_m \in \mathbb{N}^+ \setminus A_{m-1} \subset \mathbb{N}^+ \setminus A_n$ であり $b_n \in A_n$ であるから、$a_m \neq b_n$ であり $a_m = b_n$ と矛盾する。 □

この補題と数列 $\{a_m\}$ の狭義単調性より任意の 2 以上の整数 n に対して a_n は集合 A_{n-1} 内における a_n より小さい整数の個数よりも丁度 1 大きく、従って、

$$a_n = n + (b_m < a_n\text{を満たす } m \text{ の個数})$$

をみたすことが分かる.

(以下著者コメント) この事実自体は数列を書き出し実験をしてみると比較的すぐ分かりますが, これを正しく証明するのはなかなか難しいです. ここまでがこの証明の第一ステップといえます. (著者コメント終わり)

次に a_{10} を求める。補題 2 より $a_{10} \geqq 9+a_1 = 10 > b_2 = 9 > b_1 = 4$ であるから

$a_{10} \geqq 10+2=12$ である。また a_{10} より小さい b_m は $a_{10}-10$ 個存在し、従って補題 2 より

$$a_{10} > b_{a_{10}-10} \geqq 4(a_{10}-10)$$

であるから $a_{10} < 13+1/3$ よって $a_{10} \leqq 13$ である。よって補題 2 より、$b_3 \geqq b_2+4=13 \geqq a_{10}$ であるから a_{10} より小さい b_m の個数は丁度 2 であり、$a_{10}=10+2=12$ である。従って $b_{10}=59-12=47$ である。

次に a_{38} を求める。補題 2 より $a_{38} \geqq a_{10}+28=40$ であり、$b_8 \leqq b_{10}-4\cdot 2=39 < a_{38}$ であるから、$a_{38} \geqq 38+8=46$ であり、したがって $b_9 \leqq b_{10}-4=43 < a_{38}$ であるから、$a_{38} \geqq 38+9=47$ であり、$a_{38} \neq b_{10}=47$ であるから $a_{38} \geqq 48$ である。また、a_{38} 未満の $\{b_m\}$ は $a_{38}-38$ 個あり、$a_{10}=12$ 未満の $\{b_m\}$ は $a_{10}-10=2$ 個あり、a_{10} に等しい $\{b_m\}$ は存在しないから、13 以上 a_{38} 未満の $\{b_m\}$ は $a_{38}-40$ 個ある。補題 2 よりこれらの b_m の各項の差は 4 以上なので、これらの $\{b_m\}$ の内の最大の項は $13+4(a_{38}-40-1)$ 以上である。したがって、

$$13+4(a_{38}-40-1) < a_{38}$$

であるから、$a_{38} \leqq 50+1/3$ で $a_{38} \leqq 50$ である。よって補題 2 より $b_{11} \geqq b_{10}+4=51 > a_{38}$ であるから a_{38} より小さい $\{b_m\}$ の数は 10 個以下であり、$a_{38} \leqq 38+10=48$ である。よって、$a_{38}=48$ で $b_{38}=38\cdot 6-1-48=179$ である。

また、$b_{11} \geqq 51$ に注目すると、$a_{39}=49$、$a_{40}=50$ であり、したがって、$b_{39}=184$、$b_{40}=189$ であることが分かる。

次に a_{144} を求める。補題 2 より $a_{144} \geqq a_{38}+106=154$ であり、$b_{31} \leqq b_{38}-4\cdot 7=151 < a_{144}$ であるから $a_{144} \geqq 144+31=175$ であり、したがって $b_{36} \leqq b_{38}-4\cdot 2=171 < a_{144}$ であるから $a_{144} \geqq 144+36=180$ であり、したがって $b_{38} < a_{144}$ であるから $a_{144} \geqq 144+38=182$ である。また、先程と同様の議論で、$a_{38}+1$ 以上 a_{144} 未満の $\{b_m\}$ は $(a_{144}-144)-(a_{38}-38)$ 個あり、各項の差が 4 以上でこの中の最大が a_{144} 未満であるから、

$$a_{38}+1+4(a_{144}-144-(a_{38}-38)-1) < a_{144}$$

である。したがって $a_{144} < a_{38}+(144+1-38)\cdot 4/3=190+2/3$ であるから $a_{144} \leqq 190$ である。よって $b_{41} \geqq b_{40}+5=194 > a_{144}$ であるから a_{144} 未満の $\{b_m\}$ は 40 個以下で、$a_{144} \leqq 144+40=184=b_{39}$ であり、よって a_{144} 未満の $\{b_m\}$ は 38 個以下で、$a_{144} \leqq 144+38=182$ である。以上より $a_{144}=182$ で、$b_{144}=6\cdot 144-1-182=681$ である。

このように a_n を評価した結果を用いて b_n を評価し, またその結果を用いて a_n を評価し, ということを繰り返すことで, a_n の値を最終的には一つに決定することができます. この後も同様に $a_{538}=682, b_{538}=2546$ を経由して, $a_{2008}=2546$ を示すことができます. 上 3 つと同様のステップなので, 興味のある読者はぜひ証明してみてください.

著者は第一ステップまでは証明できたのですが, これを用いて a_n や b_n を評価してもどうせ範囲が分かるだけで具体的な値までは分からないだろう, と決め付けていたので, この解答はとても予想外で新鮮でした. 著者の解答は少し天下り的な面があるのですが, a_n と b_n の一般項をズバッ！と表してしまうものです.

解答例 2(著者の想定解)

$$a_n = [(3-\sqrt{3})n]$$
$$b_n = [(3+\sqrt{3})n]$$

であることを示す. ただし $[x]$ で x を超えない最大の整数を表す.

$\alpha = 3-\sqrt{3}, \beta = 3+\sqrt{3}$ とおく. このとき, α, β は無理数なので, $\alpha n - 1 < a_n < \alpha n, \beta n - 1 < b_n < \beta n$. 辺々足すことで, $6n-2 < a_n + b_n < 6n$ すなわち $a_n + b_n = 6n-1$ を得る.

a_n, b_n がともに狭義単調増加で $a_n < b_n$ であることは解答 1 と同様に示せるので, 以下の二つを示せばよい.

（1）a_{n+1} が A_n(解答 1 の記号) に含まれないこと.

（2）a_n にも b_n にも含まれない正の整数がないこと.

まずは 1 を示す. $a_{n+1} = a_m$ となる $m(m=1,\ldots,n)$ がないのは, $\alpha > 1$ より明らか. もし $a_{n+1} = b_m$ となる $m(m=1,\ldots,n)$ があったとすると, ある整数 s が存在して, $s < \alpha(n+1) < s+1, s < \beta m < s+1$ となるが, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ に注意すると, 上不等式の両辺をそれぞれ α, β で割ってから足すことで, $s < n+m+1 < s+1$ を得る. このような整数の組は存在しないので矛盾. よって 1 が示された.

次に 2 を示す. a_n にも b_n にも含まれない正の整数を t とすると, ある正の整数 n, m が存在して,

$$\alpha n < t, \quad \alpha(n+1) > t+1$$
$$\beta m < t, \quad \beta(m+1) > t+1$$

となるが, これもそれぞれ α,β で割ってから縦方向に辺々足すことで, $n+m<t, n+m+2>t+1$ を得る. 従って $n+m<t<n+m+1$ となるが, このような整数の組は存在しない. よって 2 も示された.

以上より $a_n=[\alpha n], b_n=[\beta n]$ が分かり, $a_{2008}=[(3-\sqrt{3})\cdot 2008]=[2546.04\cdots]=2546$ と求まる.

この解答の背後には, 整数論の世界では有名で, 数学オリンピックの問題等でも用いられる以下の定理があります.

定理. 1 より大きい無理数 α,β が $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$ をみたすこのとき,

$$A:=\{[\alpha n]\mid n \text{ は正の整数 }\}$$
$$B:=\{[\beta n]\mid n \text{ は正の整数 }\}$$

とすると, $A\cap B=\emptyset$ かつ $A\cup B=\mathbb{N}^+$ である.

この定理の証明は解答 2 の証明と全く同様に出来ます. 問の数列の条件の後半は, a_n と b_n をあわせると全ての正の整数がちょうど一度だけ出てくる, ということなので, ちょうどこの定理と同じ形をしています. なので後は前半の条件をみたすように α と β の値を調節してあげればよく,

$$\tfrac{1}{\alpha}+\tfrac{1}{\beta}=1$$
$$\alpha+\beta=6$$

を解くと, $\alpha=3-\sqrt{3}, \beta=3+\sqrt{3}$ となり, 解答の一般項に必然的にたどり着くことが出来ます.

この定理を使った面白い問題は他にもたくさん出来ると思うので, (著者もこの問題コーナーの出題にあたりいろいろ試してみました) 読者の方々もぜひ作ってみてください.

感想欄より

(解答 1 の応募者より) 後半の議論を一般化したいのですが, 数字ごとに例外がでるのでうまくいかず, 実験結果をそのまま答案にした感じになってしまいました.

確かに一般項が無理数とガウス記号がらみの形なので, 例外がでて一般化は難

しいと思います. ただ僕が想定していなかった解答なので, 読んでいてとても面白かったです. ありがとうございました.

合っているかどうか不安です. a_{n+1} を最も大きいものにしたらどうなるでしょうか?

テストの時とかでも, 答えがあっているかあってないかは常に不安ですよね. a_{n+1} を最も大きいものにしたらどうなるか?ということですが, 正の整数は無限にあるので, 最も大きいものというのは存在しません. ただ最も小さいものより 1 大きいもの, とかにするとまた別の問題になりますね. よければ考えてみてください (僕も考えてみます).

(おおはし ゆうた
東京大学理科一類 2 年)