

平面上に直線 l と、 l 上にない相異なる 2 点 P, Q があり、直線 PQ は l と垂直ではない。 l 上を点 R が動くとき、 $\frac{PR}{QR}$ が最大・最小となるのは R がどこにあるときか。

解説

こんにちは、第 10 回を担当した渡部です。

決められた直線上を点 R が動き、 $PR + QR$ を最小にするという問題はよく知られており、必要ならば Q を l について対称移動して (こうしても QR の長さは変わらないのでよい) l について異なる側に P, Q がある場合を考えると、その場合は R が直線 PQ と l の交点であるときに最小となるのはすぐにわかります。また、 $|PR - QR|$ を最大にするという問題もこれと同様にして解く事ができます。そこで、 PR と QR の比を最大・最小にする点はどこかと考えてみて出題したのが今回の問題でした。

解答を送ってくれた 2 人とも、座標計算によって最大・最小となる点を求めていました。

○○○ 解答例 1 (dsk さんの解答より、一部修正)

xy 平面を、直線 l が x 軸と一致し、点 P が y 軸上にあるようにとる。線分の比だけを問題にしていることから、原点を中心とした相似変換および y 軸に関する対称変換を行うことにより、点 P の y 座標を 1 とし、点 Q の x 座標 a は正として一般性を失わない。さらに、点 Q を x 軸に対称に移動しても線分の比は変化がないから点 Q の y 座標 b も正として良い。さらに点 R の x 座標を x とすると

$$\left(\frac{PR}{QR}\right)^2 = \frac{1+x^2}{(x-a)^2+b^2}$$

となる。これを $f(x)$ と置くと $f(x)$ を最大、最小にする x を求めれば良い。こ

こで,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

であり, $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x) = \frac{-2a}{\{(x-a)^2 + b^2\}^2} \times (x-g)(x-h)$$

となる. ただし,

$$g = \frac{a^2 + b^2 - 1 + \sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2 + 4a^2}}{2a}, \quad h = -\frac{1}{g}$$

とする. ここで $a > 0$ であり,

$$\sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2 + 4a^2} > \sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2} = |a^2 + b^2 - 1|$$

であるから $g > 0 > h$ である. よって $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$		h		g		∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	1	$\searrow$	最小	$\nearrow$	最大	$\searrow$	1

のようになるから, $x = h$ で最小, $x = g$ で最大となる.

x が上記の 2 値をとるとき, 点 R の位置は $(g, 0)$ 及び $(h, 0)$ となるが, これらの 2 点は「2 点 P, Q を通り, 直線 l 上に中心をもつ円 C の円周と直線 l との交点」となっていることを次に示す. 円 C の中心の x 座標を求めるには $f(x) = 1$ を解けば良く, 解は

$$x = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2a} = \frac{g+h}{2}$$

である. また円 C の半径 r は中心と点 P との距離を求めることにより,

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{a^2 + b^2 - 1}{2a} \right)^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 1)^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{g-h}{2}$$

となる. ここで,

$$\frac{g+h}{2} \pm \frac{g-h}{2} = g, h$$

であるから直線 l と円 C の交点は $(g, 0)$ 及び $(h, 0)$ となる.

もう 1 人の解答者**ひとり*つつ**さんも, $P(a, b), Q(-a, c)$ とおいて, 問の値が最

大・最小となる R の座標を求めています。

dsk さんが解答の中で指摘してくれたように、 $\frac{PR}{QR}$ の最大・最小を与える R の位置は、 P, Q の 2 点を通り l 上に中心を持つ円が l と交わる 2 点です。もちろん、初等幾何的にこれを示すこともできます。

○○○ 解答例 2

P, Q の 2 点を通り、 l 上に中心を持つ円を C とし、 C と l の交点を R_1, R_2 とする。 PQ は l と垂直でないので、必要ならば R_1 と R_2 をとりかえれば、弧 $PR_1 >$ 弧 QR_1 、弧 $PR_2 <$ 弧 QR_2 となる。 $\frac{PR}{QR}$ が最大・最小になる R の位置はそれぞれ $R = R_1, R_2$ であることを示す。

直線 l 上に R_1 と異なる点 R をとり、 $\frac{PR}{QR} < \frac{PR_1}{QR_1}$ を示す。 R_2 を通り、 l に垂直な直線を m とする。また、直線 R_1P, R_1Q と m の交点をそれぞれ P', Q' とする。

$\angle R_1PR_2 = \angle R_1R_2P' = 90^\circ$ 、 $\angle PR_1R_2 = \angle R_2R_1P'$ より、 $\triangle R_1PR_2$ と $\triangle R_1R_2P'$ は相似なので、 $PR_1 \cdot P'R_1 = R_1R_2^2$ 。同様に、 $QR_1 \cdot Q'R_1 = R_1R_2^2 = PR_1 \cdot P'R_1$ 。半直線 R_1R 上に、 $R_1R \cdot R_1R' = PR_1 \cdot P'R_1 = QR_1 \cdot Q'R_1$ となるように R' をとれば、 $\triangle R_1PR$ と $\triangle R_1R'P'$ 、 $\triangle R_1QR$ と $\triangle R_1R'Q'$ はそれぞれ相似になるので、

$$\frac{PR}{QR} = \frac{R'P' \cdot \frac{PR_1}{R'R_1}}{R'Q' \cdot \frac{QR_1}{R'R_1}} = \frac{PR_1}{QR_1} \cdot \frac{P'R'}{Q'R'}$$

となる。

一方、弧 $PR_2 <$ 弧 QR_2 より、 $\angle PR_1R_2 < \angle QR_1R_2$ なので、 $P'R_2 < Q'R_2$ となる。

よって、 $P'R' = \sqrt{P'R_2^2 + R'R_2^2} < \sqrt{Q'R_2^2 + R'R_2^2} = Q'R'$ より、 $\frac{PR}{QR} < \frac{PR_1}{QR_1}$ 。

R_2 で最小となることの証明も同様である。

今回の問題では、2 点からの距離の比を考えましたが、一般に、2 点からの距離の比が一定となる点の軌跡は円（もしくは 2 点の垂直二等分線）となり、**アポロニウスの円**として知られています。

これに関して、次のようなことが成り立ちます（証明は略）。

C_1 を 2 点 P, Q からの距離の比が一定となるアポロニウスの円、 C_2 を P, Q を

通る円とすると, C_1 と C_2 は直交する. つまり, C_1 と C_2 は交わり, その交点での C_1 の接線と C_2 の接線は直交する.

この事実から, 今回の解答に登場した「 l を直径として P, Q を通る円が l と交わる 2 点」というのは, 実は P, Q に関するあるアポロニウスの円が l と接する点であったとわかります. アポロニウスの円は 2 点からの距離の比がある一定値 α の点の軌跡で, その外側, 内側の領域では 2 点からの距離の比が α より大, 小もしくは小, 大となるので, R を通る P, Q のアポロニウスの円について l 上の点がすべて同じ側にあるとき, つまり R でアポロニウスの円が接するとき問の比が最大・最小となるわけです.

■ 感想欄より

解析的な回答でごめんなさい。

いえいえ. 今回の問題は, 距離があらわれつつも, その 2 乗を考えればルート of の計算などには必要ないので, 座標計算がしやすかったのではないかと思います.

(わたなべ まさき
東京大学理科一類 2 年)