問題コーナー

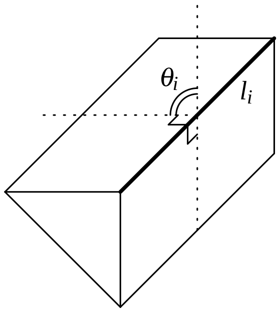
第 9 回

入江 慶

G

2007年12月 5日出題
2008年 1月15日締切
1月29日解説

P を凸多面体とし，P の辺を $l_1,\ldots,l_n$ とする．各 $1 \leqq i \leqq n$ について，l_i を辺に持つ P の 2 つの面を考え，それら 2 つの面のなす角を外側から測ったものを θ_i とする（図に，測り方の例を示した）．



このとき，$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \geqq 3\pi$ であることを示せ．

解説

第 9 回の問題を担当した入江です．残念ながら，今回は正解者無しとなってしまいました．はじめに，筆者の想定していた解答を紹介します．

解答の前に，1 つ用語を導入しましょう．凸多面体 P と平面 H について，P が H の定める半空間のいずれかに含まれ，さらに $P \cap H \neq \emptyset$ となるとき，P を H の**支持平面**といいます．

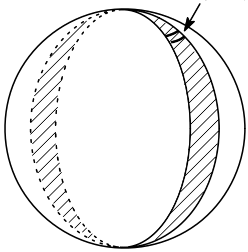
◦○◯ **解答例** 1

ベクトル $\vec{v} \neq 0$ と P の辺 l_i について，l_i と $\vec{v}$ が平行であるか，l_i を通り $\vec{v}$ と平行な平面が P の支持平面となるとき，l_i と $\vec{v}$ は**接している**ということにする（これは，この解答に限った言葉で一般的な用語ありません）．

任意のベクトル $\vec{v} \neq 0$ について，$\vec{v}$ と接しているような l_i が 3 つ以上ある

ことをまず示す．$\vec{v}$ と垂直な平面 Π を適当にとり，σ を Π への正射影とする．すなわち，σ は空間内の各点 p に対して，p を通り $\vec{v}$ と平行な直線と Π との交点を対応させる写像である．このとき，P の像 $\sigma(P)$ は Π 上の凸多角形になる．その辺を $e_1,\ldots,e_m$ おけば，$m \geqq 3$ が成り立つ．各 e_k について，$\sigma(l_i) \subset e_k$ かつ $\sigma(l_i)$ が 1 点でないような辺 l_i が存在する．このとき，l_i を通り $\vec{v}$ と平行な平面とは e_k を通り $\vec{v}$ と平行な平面であり，それは明らかに P の支持平面である．ゆえに l_i と $\vec{v}$ は接している．この l_i を l_{i_k} と書く．$k=1,2,\ldots,m$ について $\sigma(l_{i_k}) \subset e_k$ かつ $\sigma(l_{i_k})$ は 1 点でないから，$\sigma(l_{i_1}),\ldots,\sigma(l_{i_m})$ は全て異なり，ゆえに $l_{i_1},\ldots,l_{i_m}$ も全て異なる．$m \geqq 3$ であるから，$\vec{v}$ と接しているような l_i は 3 つ以上あることがわかる．

空間内の適当な点 O をとり，O を中心とする単位球面 S を考える．各 l_i について，$\overrightarrow{Ox}$ と l_i が接しているような S 上の点 x 全体の集合を B_i とおく．B_i は S 上の下のような領域であり，その面積は $4\theta_i$ である．



S 上の各点 x について，$\overrightarrow{Ox}$ と接している l_i が 3 つ以上あることから，x を含む B_i は 3 つ以上あることが分かる．したがって，B_i の面積の総和は $3\cdot(S$ の面積$) = 12\pi$ 以上でなくてはならない．ゆえに $\sum_{i=1}^{n} 4\theta_i \geqq 12\pi$ となり，両辺を 4 で割れば示すべき不等式を得る．

この解答に沿ってもう少しがんばると，一般に $\sum_{i=1}^{n} \theta_i > 3\pi$ となることが示せます．これは最良の結果です．すなわち，次が成り立ちます：「任意の $\varepsilon > 0$ について，ある凸多面体 P が存在し，P について $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$ を計算すると $\sum_{i=1}^{n} \theta_i \leq 3\pi + \varepsilon$ となる」．このような P の例は簡単に作れるので，是非考えてみてください．

今回の問題の背景について説明します．まず，S を単位球面とします．S 上の大円の一部を切り取ったものを**測地線分**ということにし，S 上のいくつかの点と，それらの点を結ぶいくつかの測地線分からなる図形を**球面グラフ**ということにします．

さて，凸多面体 P が与えられたとき，各面 F に対して，$\overrightarrow{Ox_F}$ が F における P の外向きの法線ベクトルとなるような S 上の点 x_F を考え，隣り合う面 F と F' について x_F と $x_{F'}$ を測地線分で結ぶことで，球面グラフ G が定まります．隣り合う 2 つの面と，それらの共有する辺は一対一に対応していますから，P の辺と G の辺とは一対一に対応しており，P の辺 l_i に対応する G の辺を e_i とおくと，e_i の長さは θ_i になります．すると，$\sum_{i=1}^{n} \theta_i$ とは G の辺長の総和に他なりません．

ここで，S 上の大円と G との交点について考察します．S に含まれる適当な半球面 S_+ を固定し，各 $x \in S_+$ に対して，O を通り $\overrightarrow{Ox}$ と垂直な平面と S との交わりとして得られる大円を $L(x)$ と書きます．$x \mapsto L(x)$ という対応により，S_+ 上の点と S 上の大円とはほぼ一対一に対応しています（ほぼ，というのは x が S_+ の境界上にあるときは二対一の対応になるからです）．さて，$\overrightarrow{Ox}$ と接しているような l_i が 3 つ以上存在することを解答で示しましたが，これは $L(x)$ と交わるような e_i が 3 つ以上存在する，ということに他なりません．大円 L と G との交点の個数を $I(L,G)$ と書くことにすると，任意の $x \in S_+$ について $I\bigl(L(x),G\bigr) \geqq 3$ が成り立つことになります．さて，一般に球面グラフ G について，

$$(G \text{ の辺長の総和}) = \frac{1}{2}\int_{S_+} I\bigl(L(x),G\bigr)\,dx$$

が成り立つことが知られています．この問題の場合，任意の $x \in S_+$ について $I\bigl(L(x),G\bigr) \geqq 3$ となるので，

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = (G \text{ の辺長の総和}) = \frac{1}{2}\int_{S_+} I\bigl(L(x),G\bigr)\,dx \geqq \frac{1}{2}\int_{S_+} 3\,dx = 3\pi$$

となり，題意が成立します．解答例の後半部分は，以上の議論と大体同じもので，上の公式も解答で与えたアイデアを用いると簡単に証明できます．

今回の問題と似た方法で証明できる有名な結果として，「自明でない結び目の全曲率は 4π 以上である」というものがあります．これに興味のある人は，

『多様体の微分幾何学』 丹野修吉，実教出版

の 29 頁を見てみましょう．

$\left(\begin{array}{l}\text{いりえ けい}\\ \text{東京大学理学部数学科３年}\end{array}\right)$