

次の条件をみたす, $0 < \alpha < 1$ なる実数 α , 相異なる 3 つの素数 p_1, p_2, p_3 , および相異なる 3 つの正整数 k_1, k_2, k_3 は存在するか?

条件: 任意の正整数 n に対し $a_{(n+k_1)}^{(1)} = a_{(n+k_2)}^{(2)} = a_{(n+k_3)}^{(3)}$ が成立する.

ただし, α の p_i 進小数表示を $0.a_1^{(i)} a_2^{(i)} a_3^{(i)} \dots$ と書くこととする.

解説

こんにちは, 出題者の松本です.

今回の問題には 3 人から解答があり, うち 1 人が正解でした. 正解者の解答を紹介します.

・〇〇〇 解答例 (武田 久輝君の解答より)

p 進法の表記であることを $[\dots]_p$ で表すことにする.

循環小数 $\alpha = [0.\underbrace{0\dots 0}_{k \text{ 個}} \underbrace{a_1 a_2 \dots a_l}_{\text{循環節}} \dots]_p$ の値は,

$$\begin{aligned} p^k \alpha &= [0.a_1 a_2 \dots a_l \dots]_p, \\ p^l p^k \alpha &= [a_1 a_2 \dots a_l . a_1 a_2 \dots a_l \dots]_p \end{aligned}$$

より $p^k(p^l - 1)\alpha = [a_1 a_2 \dots a_l]_p$ となるので, $\alpha = \frac{[a_1 a_2 \dots a_l]_p}{p^k(p^l - 1)}$ である. ここで

とくに, $[a_1 a_2 \dots a_l]_p = [00\dots 01]_p = 1$ の場合を考えると, $\alpha = \frac{1}{p^k(p^l - 1)}$ となる.

さて, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 0, l = 2, \alpha = \frac{1}{24}$ とおくと,

$$\alpha = \frac{1}{p_1^{k_1}(p_1^l - 1)} = \frac{1}{p_2^{k_2}(p_2^l - 1)} = \frac{1}{p_3^{k_3}(p_3^l - 1)}$$

題の条件が成り立つ. すなわち, 条件をみたす例は存在することが示された.

存在することの証明には、例を 1 つ挙げれば十分です．この解答では、循環節が $00\cdots 01$ であり、その前に 0 以外の数が来ないような場合のみを考えることにより、条件をみたす例をみつけやすくしています．

ちなみに、出題者の用意していた解もこの例によるものであり、それ以外に例が存在するかは私は知りません．他にもあったらぜひ教えてください．

「各 p_i が素数」という条件を外すと次のような例が存在します．

p を 2 以上の整数として、 $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-2^k}$ とすると、 α の p^{2^k} 進法表示は

$$[0.x101000100000001\cdots]_{p^{2^k}}$$

となる（ここで $x = \sum_{l=0}^{k-1} p^{2^k-2^l}$ である）．したがって、 p_i を p^{2^k} の形の数、 $k_i = 1$ とすれば条件が成り立つ．

このような自明な例を許しては面白くないので、出題に当たっては各 p_i に「素数」という条件をつけましたが、より弱く「互いに素」とした問題を考えても面白いかもしれません．

ところで、条件をみたす例であって α が無理数であるものが存在すれば、その p 進法小数表示は循環小数にならないため、証明には上とは異なる手法を用いる必要があるでしょう．興味のある人は（そのような例の有無も含めて）考えてみてください．

（まつもと ゆうや
（東京大学理学部数学科 3 年）