

サマセミ国には 19824 個の島と 19823 本の橋があり、どの 2 つの島も 1 つの橋でつながっているか、あるいはつながっていないかのいずれかである。またどの島からどの島までも何本かの橋を伝ってわたっていくことができる。

また、ある島から別の島にわたっていくのに使用する橋の本数の最小値を 2 つの島の距離ということにする。すると距離の最大値は 2007 であった。

ここで、周遊経路とは、1006 個の島を 1 つずつ重複なくわたっていく経路を指すことにする。ただし同じ島を 2 回通ってはならず、使用する橋がすべて同じである経路は同一の経路と考える。

さて、サマセミ国には少なくともいくつかの周遊経路が存在するか。

(なお、経路における 2 つの端は異なる島であり、その 2 つの島は橋でつながっていてもいなくても良い)

解説

5 件(重複等を除く)の解答が寄せられまして、しかたさん、abe さんが正解でした。たくさんのご解答、ありがとうございました。

今回の問題文は夏季セミナーの開始日が平成 19 年 8 月 24 日であること、及び今年が 2007 年であることから作りました。もちろん、他の数字になってもちゃんと成立します。問題の分野としてはグラフ理論と呼ばれる組合せ論の 1 分野です。グラフ理論は整数論等に比べると歴史が短いため、数学の分野の中では知名度が高い分野ではありませんが、巷間では秋山仁先生などが専門家として有名です。それでは早速問題の解説に移らせていただきます。

まず本問の答えは「18819」です。初めに、筆者の作成した解答をご紹介します。

●○○ 筆者解答

まず距離が最大となる経路を P とし、 P を構成する島を順に $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ とする。

すると P のなかには $A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i+1005}$ という周遊経路が存在する ($i = 1, 2, \dots, 1003$). よってまず 1003 個の周遊経路が存在する.

次に P 上に属さない島 B から出発する周遊経路を考えることができる. まず, B から P までの距離を d とする. するとある 1 以上 2008 以下の自然数 j が存在して, B から A_j までの距離が d となる. ここで B から A_j まで最短距離 d でゆく経路を P_B と呼ぶことにする. もし $d \geq 1005$ であれば B から出発して P_B 上をちょうど距離 1005 まで進む経路を周遊経路とする. またもし $d \leq 1005$ であれば B から出発して P_B 上を通り A_j までたどりついたあと, $j \leq 1004$ であれば $A_{j+1005-d}$ まで, $j \geq 1005$ であれば $A_{j-1005+d}$ まで P 上を通る経路を周遊経路とする. こうすれば周遊経路を $19824 - 2008 = 17816$ 個の周遊経路を得られる.

2 つを併せれば 18819 個の周遊経路を得られる.

またこの数字は最良である. そのためには実例を構成すればよい. まず, 2008 個の島 $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ は, A_i と A_{i+1} の間が橋で結ばれているとしよう ($1 \leq i \leq 2007$). また他の島はすべて A_{1004} とだけ結ばれているとしよう. このとき, ちょうど 18819 個の周遊経路しか存在しない.

このような問題は, 多くの場合, 証明の手順として,

- (1) 少なくとも n 個存在する事を示す
- (2) n 個しか存在しないような例を作る

の 2 つの手順を踏む必要があります (この問題では $n = 18819$). 前者で答えが n 以上であることを示し, 後者で答えが n 以下であることを示すわけです.

多くの場合, 前の手順と後の手順には別々に部分点が与えられます. だから, 少なくとも n 個存在する事を示すことだけでも, n 個しか存在しないような例を作るだけでも部分点はもらえます (だから, 一方だけでも分かったらちゃんと答案に書くようにしましょう). もっと言えば, n の数字を正しく予測するだけでも点数がもらえる場合があります.

では正解者のしかたさんの解答をご紹介します.

○○○ 解答例 1 (しかたさんの解答より)

島を $L_1, L_2, \dots, L_{19824}$ をする. 距離が 2007 の島のうちの 1 組を一般性を失うことなく L_1, L_{2008} とし, そのときの経路を $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ とする. 条件より橋は 19823 本なので, 島を頂点, 橋を辺としたときそのグラフはループを作

らない。まず、橋 (辺) と頂点 (辺) を 1 個ずつつなげたものを「ユニット」と名付ける。そこで $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のグラフにユニットを $19823 - 2007 = 17816$ 個つなげることを考える。まず 1 個目をつなげる。このとき $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のどの一つの頂点につなげても絶対に周遊回路は 1 つ増える。以下 2 個目から、同じようにどのような場所に付けても周遊回路が 1 つ増える。すると、まず $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のグラフで周遊回路は 1003 個出来ているので、少なくとも $1003 + 17816 = 18819$ 個の周遊回路が出来る。次にその例を示す。

例: $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のグラフの L_1 にユニットを 17816 個つなげる。

よって 18819 個

基本的に同様の解答と考えられます。簡潔で的を得ている良い解答だと思います。ただ、「以下 2 個目から、同じようにどのような場所に付けても周遊回路が 1 つ増える。」のところはもう少し補足があった方が安心できる解答になると思います。なぜならば、2 個目からは、付け加えられた頂点が $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のどれとも接続していない可能性があるからです。もちろん、このことは少し補足をすればすぐに解決できる問題なのですが、冒頭に載せた筆者の解答では、以下のように若干長めにそこを説明しました。

○○○ 解答抜粋

次に P 上に属さない島 B から出発する周遊経路を考えることができる。まず、 B から P までの距離を d とする。するとある 1 以上 2008 以下の自然数 j が存在して、 B から A_j までの距離が d となる。ここで B から A_j まで最短距離 d でゆく経路を P_B と呼ぶことにする。もし $d \geq 1005$ であれば B から出発して P_B 上をちょうど距離 1005 まで進む経路を周遊経路とする。またもし $d \leq 1005$ であれば B から出発して P_B 上を通り A_j までたどりついたあと、 $j \leq 1004$ であれば $A_{j+1005-d}$ まで、 $j \geq 1005$ であれば $A_{j-1005+d}$ まで P 上を通る経路を周遊経路とする。こうすれば周遊経路を $19824 - 2008 = 17816$ 個の周遊経路を得られる。

正解者の abe さんの解答も、おおむね同様の方針です。abe さんの解答を紹介いたします。

○○○ 解答例 1 (abe さんの解答より)

便宜上、島を頂点、相違なある二つの島を結ぶ橋を辺とする。

このとき、頂点を辺で結んだグラフ T は、題意より、木構造であることが自明。
($\because$ 頂点の数 $-$ 辺の数 $= 1$)

つまり、このグラフは単連結かつ閉路を持たない。

また、題意より、ある頂点から別の頂点にわたっていくのに使用する辺の本数の最小値を 2 つの頂点の距離ということにする。(最小であるから当然、頂点の重複はない。)

すると距離の最大値は 2007 であった。

このことから、少なくとも一組、 A_i が A_{i+1} に連続して繋がるような ($1 \leq i \leq 2007$), $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ が存在する。

$A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ の内には題意の周遊経路は $2008 - 1006 + 1 = 1003$ 個ある。

ここで $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ の 2008 個の頂点とは異なるある頂点 X について、このグラフが木構造であることから、この異なる頂点は少なくとも一つある頂点 A_s と繋がっている。

次の命題①を示す。

命題①

$A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ のうちの A_s と繋がっているこれら 2008 個の頂点とは異なる X について、 X を通る周遊経路が必ず存在する。

命題①の証明

s について、 $2 \leq s \leq 1004$ か $1005 \leq s \leq 2007$ のいずれかを満たす。($\because$ ディリクレの原理)

前者 $2 \leq s \leq 1004$ を満たす場合は $X, A_s, A_{s+1}, \dots, A_{s+1004}$ の 1006 個の頂点が連続して繋がっているので、周遊経路は存在する。

後者 $1005 \leq s \leq 2007$ を満たす場合は $X, A_s, A_{s-1}, \dots, A_{s-1004}$ の 1006 個の頂点が連続して繋がっているので、周遊経路はやはり存在する。

よって命題①は示された。

$A_1, A_2, \dots, A_{2008}, X$ と異なる頂点 Y について、頂点 X に新たに頂点 Y が連結している場合もやはり命題①から Y を通る周遊経路が存在する。($\because$ X を末端

として X を通る周遊経路が存在する.)

また命題①より, $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ に Y が連結している場合も Y を通る周遊経路は存在する.

よって $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ とは異なる各頂点について、それぞれの頂点について少なくとも一つその頂点を通る周遊経路が存在する. …②

②より, 周遊経路は少なくとも, $1003 + 19824 - 2008 = 18819$ 個存在することが示される. …③ また, $A_1, A_2, \dots, A_{2008}$ を除く, 残り $17816 (= 19824 - 2008)$ 個の頂点について, これらがそれぞれ A_{1004} に連結していれば, 17816 個のそれぞれを結ぶような周遊経路は存在せず, 結果, 各頂点を末端とする唯一の周遊経路が存在することになる. よって③で示された 18819 という下界は最良である.

∴ 題意における周遊経路は, 少なくとも, 18819 個存在し, この数字は最良である.

素晴らしい解答だと思います. また一読したところ, グラフ理論にも通暁しているらしいようです. 解答の筋道には問題ありません. 解答の書き方について, 若干手を加えたところなのですが

(1) 原文では「②より, 周遊経路は少なくとも, $1003 + 19824 - 2008 = 18819$ 個存在することが仮定される. …③」とありましたが, ここは「②より, 周遊経路は少なくとも, $1003 + 19824 - 2008 = 18819$ 個存在することが示される. …③」と修正しました. 「仮定」は, 正しいか間違っているか分からないことを前提としておいてみる行為で, 数学的帰納法でまだ証明されていない命題を仮定したり, 「君の言っていることが正しいかどうかは分からないが, とりあえず正しいと仮定して話を進めよう。」という形で用います. ここでは②より③が導出されるので, 「示される」という言葉を用いるとしっくりくるでしょう.

(2) 原文では

「結果, 各頂点を末端とする唯一の周遊経路が存在することになる.

よって③の仮定は正しい.

∴ 題意における周遊経路は, 少なくとも, 18819 個存在する.」

とありましたが, ここは

「結果, 各頂点を末端とする唯一の周遊経路が存在することになる. よって③

で示された 18819 という下界は最良である.

∴ 題意における周遊経路は, 少なくとも, 18819 個存在し, この数字は最良である。」

と修正しました. ここは数学の問題の解き方で, 「周遊経路の数の最小値が 18819 である」ということを証明するには

- 周遊経路の数 ≥ 18819
- 周遊経路の数がちょうど 18819 となる例が存在する

の 2 つを証明すればいいので, まず③で前者を証明し, 次に実際に周遊経路の数がちょうど 18819 となる例を構成したので, 後者を証明したというプロセスを明記するわけです. そのためには

「結果, 各頂点を末端とする唯一の周遊経路が存在することになる. よって周遊経路がちょうど 18819 個存在するようなグラフが存在することが分かった.

… ④

③, ④より, 題意における周遊経路は, 少なくとも, 18819 個存在することが証明された. またこの数字は最良である。」

のように書けばいいでしょう.

あと, 周遊経路は最低で 1002 個存在という解答も多く見られましたが, $L_1, L_2, \dots, L_{2008}$ のどの点に点を接続しても, 新しい周遊経路が得られてしまいます (周遊経路は 1006 個の島よりなるので距離 1005 であることに留意!). ここは数字が 1 違うだけで全然違う問題になってしまう (実際, 周遊経路が 1007 個の島よりなる距離 1006 の経路であったなら, 全然違う問題になってしまいます) のでご注意ください!

■ 感想欄より

あっているかどうか自信がない。間違っている可能性が高い

確かに得られる答えはやや複雑ですね.

気付けば単純だった。

確かに単純な問題ではありますが, 正確な証明をしようとなると意外と難しいと思います.

周遊経路大杉だろ

確かにそうかもしれません. これは当問題で使用される数字が大きい (19824 や 2007 等) ことが原因です.

計算間違いがないことを祈るばかりです

当コーナーは, 応募された解答をきちんと読みますので, 計算間違いは過度に心配しなくてかまいません.

グラフ理論や一部の組合せ論は情報科学や電気工学のような分野で使われることが多いようです. 例えば電気の配線などは, 点が端子, 辺が電線に相当しますよね. インターネットや mixi などはウェブサイトが点, リンクでつながっている関係が辺に相当します (この場合, 辺は一方方向なので, このような辺を特に有向辺といい, 点と有向辺よりなるグラフを有向グラフ又はダイグラフと称します). また, 経済学でもグラフ理論の考え方が使われます. 例えば新人の医師を病院にどう配属するかという問題はマッチングの問題と言われますが, これは医師及び病院を点, 雇用関係を辺で表せばグラフ理論の問題となります (この場合, 医師同士は辺で結ばれませんし, 病院同士も辺で結ばれません. このようなグラフは特に「2 部グラフ」と言われます). このように, グラフ理論の考え方は多くの自然科学・社会科学で用いられているので, 少しだけでもなじんでおいてもらえればうれしいです.

(いしだりょう
東京大学大学院理学系研究科修了)