

平面から平面への全単射 F であって、次の性質をみたすものをすべて求めよ。

- (1) 同一直線上にない 3 点 A, B, C であって $F(A) = A, F(B) = B, F(C) = C$ をみたすものが存在する。
- (2) 平面上の任意の直線 l について、その像 $F(l)$ は再び直線となる。

解説

第 3 回の問題を担当した入江です。出題時の問題文では集合と写像について説明していましたが、今回は割愛させていただきました。

それでは、早速解説にうつりましょう。

○○○ 解答例 1 (kami 君の解答より (一部略))

題意をみたす写像 F は恒等写像だけであることを示す。

まず、平面上の 2 直線 l, m が平行ならば、 $F(l), F(m)$ も平行である。なぜなら、 $F(l)$ と $F(m)$ が平行でないならば必ずある一点 P を共有するが、 $F(Q) = P$ をみたす点 Q をとれば (F が全単射であることに注意せよ)、 $Q \in l, m$ となって l と m が平行であることに反するからである。

問題文の (1) にしたがって 3 点 A, B, C をとり、平面上の任意の点 P について P の座標を

$$\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{BC}$$

をみたす実数の組 (t, s) として定める。 A, B, C の 3 点が同一直線上にないことから、任意の点についてその座標が一通りに定まる。 A, B, C の座標はそれぞれ $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ である。

ここで、 $F((1, 1)) = (1, 1)$ を示す。直線 $y = 0$ を l 、直線 $y = 1$ を m_0 とおく。 $F(A) = A, F(B) = B$ であるから、 $F(l)$ は 2 点 A, B を通る直線、つまり l に等

しい. $F(C) = C$ であるから, $F(m_0)$ は C を通り, さらに $F(l)$, つまり l と平行である. したがって $F(m_0) = m_0$.

直線 $x = 1$ を m_1 とおくと, 同様に $F(m_1) = m_1$. $(1, 1)$ は m_0 と m_1 の交点であるから, $F((1, 1))$ は $F(m_0)$ と $F(m_1)$ の交点, つまり $(1, 1)$ に等しい. 直線 $x = y$ を n とおくと, $F(n) = n$ が成り立つことに注意しよう.

実数から実数への関数 $f(x)$ を, $F((x, x)) = (f(x), f(x))$ をみたすように定める. このとき, $F((x, y)) = (f(x), f(y))$ となることを示す.

$x = y$ の時は明らかである. $x \neq y$ のとき, 2 点 (y, y) と (x, y) を通る直線は l に平行であるから, $F((y, y))$ と $F((x, y))$ を通る直線も l に平行である. したがって, $F((x, y))$ の y 成分は $f(y)$ に等しい. $F((x, y))$ の x 成分が $f(x)$ に等しいことも同様に示される. したがって $F((x, y)) = (f(x), f(y))$.

f は次の 3 つの性質をみたす.

- (1) f は全単射であり, $f(0) = 0, f(1) = 1$.
- (2) 任意の実数 x, y について $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- (3) 任意の実数 x, y について $f(xy) = f(x)f(y)$.

(1) は明らかであろう. (2) は, $x \neq 0$ のときに示せば充分である. 2 点 $(0, y)$ と $(x, x+y)$ を通る直線は n に平行であるから, 2 点 $(0, f(y))$ と $(f(x), f(x+y))$ を通る直線も n に平行である. したがって $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

最後に (3) を示す. 3 点 $(0, 0), (1, y), (x, xy)$ は同一直線上にあるから, $(0, 0), (1, f(y)), (f(x), f(xy))$ も同一直線上にある. ゆえに $f(xy) = f(x)f(y)$. これですべて示された.

(1), (2), (3) より, すべての有理数 x について $f(x) = x$. さらに, 実数 $x > y$ について不等式

$$f(x) = f(x-y) + f(y) = f(y) + f(\sqrt{x-y})^2 > f(y)$$

が成り立つから, f は単調増加関数である.

実数 t について, $x \leq t \leq y$ をみたす有理数 x, y を任意にとると

$$x = f(x) \leq f(t) \leq f(y) = y$$

となるから, $f(t) = t$. ゆえに f , したがって F も恒等写像である.

逆に, 恒等写像を F とおけば題意の条件をみたすことは明らかである.

問題文で与えられている F についての情報がきわめて少ないので、これ以外の解答を探すのはなかなか難しいと思います。今回正解した方の解答は本質的にすべて同じものでした。

上の証明を整理してみましょう。適切に座標を入れて考えれば、

$$F((x, y)) = (f(x), f(y))$$

をみtas関数 f がとれることに気づくのは容易だと思います。肝心なのは

(1) f は実数から実数への同型である、すなわち f は全単射であり、任意の実数 x, y について

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

が成り立つ。

(2) 実数から実数への同型は恒等写像のみである。

の 2 点を証明することです。

関係式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ と $f(1) = 1$ だけを用いて f が恒等写像であると結論づけている方が数人いましたが、これは全く明らかなことではありません。それどころか、おそらく反例が存在します。しかしながら、筆者は締め切りまでに反例を思いつくことができませんでした。仕方がないのでこれはみなさんへの問題としておきます。

f は $f(1) = 1$ をみtas実数から実数への写像とし、かつ任意の実数 x, y について $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つとする。このとき、 f は恒等写像であるといえるか？

最後に、同様の問題を一般の体上のアファイン平面で考えるとどうなるかについて考えてみます。 k を体、 $k^2 = \{(x, y) \mid x, y \in k\}$ を k 上のアファイン平面としましょう。 k^2 の部分集合

$$\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\} \quad ((a, b) \neq (0, 0))$$

を k^2 上の直線といいます。

k^2 から k^2 への全単射 F であって、直線を直線にうつすものを考えましょう。このとき、 k の自己同型 f が存在して、 $F((x, y)) = (f(x), f(y))$ となることが、今回の解答と全く同様に示せます。逆に、 f を k の自己同型とするとき、この式で与えられる F が条件をみtasことも容易に確認できます。

ところが、一般に体 k の自己同型は恒等写像とは限らないので、 F は恒等写像とは限りません。たとえば k が位数 p^n の有限体のときは（ただし p は素数）、 k の自己同型は丁度 n 個存在しますから、条件をみたす F も丁度 n 個存在します。

ここでは、「体」や「アファイン平面」といった用語については説明を省かせていただきます。今の話に興味を持った方には、

佐藤肇・一樂重雄、『幾何の魔術（魔方陣から現代数学へ）』、日本評論社

のご一読をお勧めします。魔方陣を枕に、有限体とその上のアファイン平面、射影平面について論じた、非常に面白い本です。

ただ、この本には有限体論（とくに有限体のガロア理論）についてはそれほど詳しく書かれていません。これについては、たとえば今回の夏季セミナーで輪講する予定の

足立恒雄、『ガロア理論講義』、日本評論社

が参考になるでしょう。

■ 感想欄より

結局関数方程式に帰着してしまった。

「純粋に幾何的」な解き方を考えます。

使える構造がすごく乏しいですから、関数方程式みたいになるのは仕方ないと思います。いわゆる「幾何的」な議論って対象の上のいろいろな構造を使っているわけですから。

同じような問題を解いたばかりだったので、割と早くひらめきました

「同じような問題」って...!?

（いりえ けい）
（東京大学理科一類 2 年）