# 2012年度JMO夏季セミナー 本の紹介

**数学オリンピック財団**
JMO 夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 10 冊です.

1. $D$ 加群と計算数学 - 大阿久俊則
2. 複素関数の解析学 - 郡敏昭
3. 幾何の魔術 - 佐藤肇, 一楽重雄
4. 組合せゲーム理論入門 - M. H. Albert(著), R. J. Nowakowski(著), D. Wolfe(著), 川辺治之 (訳)
5. 射影平面の幾何学 - 郡敏昭
6. 楕円曲線論入門 - J. H. Silverman(著), J. Tate(著), 足立恒雄 (訳), 小松啓一 (訳), 木田雅成 (訳), 田谷久雄 (訳)
7. Topology from the Differentiable Viewpoint - John W. Milnor
8. A Classical Introduction to Modern Number Theory - Kenneth Ireland, Michael Rosen
9. The Symmetric Group - Bruce E. Sagan
10. Lie groups, Lie Algebras, and Representations - Brian C. Hall

**洋書を読むにあたって**

7, 8, 9, 10 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから 1 冊ずつ内容を紹介していきます. なお, セミナーで本を担当する人と, 紹介文を書いた人とは異なる場合があるのでご了承ください.

**「難易度の目安」について**

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

## 1 $D$ 加群と計算数学 - 大阿久俊則

**■難易度の目安 ☆☆☆**

高校数学において, 関数の微分というものを学びます. そこでは関数の微分を瞬間変化率として定義して, 公式をいくつか証明し, 具体的な関数の微分の計算を練習するわけですが, この微分という操作を代数的にとらえてみようというのが $D$ 加群の考え方です. 微分というものを個々の関数に対して考えるのではなく, 例えば多項式全体という集合を考えて, 微分とは「多項式に対してそれを微分した多項式を対応させる写像」のことだと思うわけです. このことを, 「微分は多項式全体の集合に作用している」といいます. また, 多項式 $f(x)$ をひとつ固定すると, 「多項式に対してそれに $f(x)$ をかけた多項式を対応させる写像」も考えることができます. つまり $f(x)$ が多項式全体の集合に作用しているわけです. この「微分」と「多項式倍」の 2 つを組み合わせてできるものを「微分作用素」といい, (大雑把にいうと) 微分作用素が作用しているような集合のことを $D$ 加群といいます. したがって今挙げた多項式全体というのは $D$ 加群の一例です.

微分をこのようにとらえることで, 例えば微分方程式の解を求めたりすることができます. 微分方程式とは, 関数とその微分がみたす関係式という形でかかれる方程式のことで, 例えば

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + x\frac{d}{dx}f(x) + x^2 f(x) = 0$$

のようなもの (これは, $f$ の 2 階微分と $f$ の 1 階微分の $x$ 倍と $f$ の $x^2$ 倍の和が 0, という方程式) です. こういう方程式をみたす多項式全体, あるいは有理式 (多項式の商でかける式) 全体の集合がどういう構造をしているか, などということを代数的な計算で調べることができるわけです. ここでは 1 変数の関数について説明しましたが, 多変数の関数について同じことを考えることができて, $D$ 加群の考え方が威力を発揮します.

本書は, 具体的な計算の方法を与えることを重視して書かれており, 例も豊富なので自分で手を動かして計算しながら理解を進められておもしろいと思います. 予備知識としては, 高校数学で学ぶ「多項式の微分」がわかっていれば問題ありません. 環, 加群といった代数の言葉も定義から書かれているので本書で学ぶことができますが, 線形代数の言葉はことわりなしに使われているので, そこはセミナーのはじめにチューターが補足することになるかと思います.

(文責：関 典史)

## 2　複素関数の解析学 - 郡敏昭

**■難易度の目安 ☆☆**

この本は, 題名のとおり「複素解析」と呼ばれる分野の入門書です. 「複素解析」とは, 複素数の関数の色々な性質を主に微分積分学を利用して調べる学問です.

高校数学における関数というのはもっぱら実数の範囲のもので微分積分もその仮定の下で教えられています. 複素解析ではこれを複素数にまで拡張した形で微分積分を定義します. 複素関数に対する微分可能という条件は実関数の場合よりもかなり強く, そのため微積分について実関数の場合よりも遥かに強い結果が成り立ちます. 例えば複素関数は微分可能ならば何度でも微分できることがいえます. また微分可能な関数のある種の定積分は, 原始関数を具体的に求めずとも いくつかの点の周りでの関数の情報から簡単に計算することができます. さらに複素関数の積分では実部を $x$ 軸, 虚部を $y$ 軸で複素数を表した複素平面上で定義されていて, 経路を定めることで定義されますが, コーシーの積分定理を用いると微分可能な複素関数の積分経路を特別な場合を除いて取りかえることができます.

このような拡張には様々なメリットがありますが, この本では一例として, 複素積分を用いて具体的な実関数の積分値, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ を求めています. この定積分は実関数のまま求めるのは難しいですが $\frac{\sin x}{x}$ を複素関数 $\frac{e^{iz}}{z}$ に拡張し, コーシーの積分定理を用いると大小 2 つの半円上での積分に置き換えられます (正確には 2 円の半径を 0, $\infty$ に近づけて極限を取ります). 後は円周上の積分値は指数関数の簡単な計算なので適当に評価すれば $\frac{\pi}{2}$ とエレガントに求まります. 詳しい説明は割愛しているのでわかりにくいでしょうが, セミナーで本を読めば理解できますので心配ご無用です.

この本では, まず第 $1, 2$ 章で複素関数の微分積分の定義をしていて, この中で必要な知識は一通り確認されています. 第 $3, 4, 5$ 章では実際に複素解析で用いられている手法を紹介し, 先述のコーシーの積分定理のような代表的な定理を証明しています. 第 6 章では代数方程式の解の存在定理 (複素数係数の代数方程式は必ず複素数の解を持つ) の証明を目指しています. 最後の第 7 章では上で挙げた通り複素積分の有用さを実例をもって示しています.

第 5 章後半から第 6 章は内容が発展的ですので, セミナーでは複素関数の微分積分の定義を固めて第 5 章の前半まで進み, 第 7 章を読むことになると思います. 予備知識としては, 高校数学の微積分や複素数の概念を理解していれば十分でしょう.

(文責：井上 秀太郎)

## 3　幾何の魔術 - 佐藤肇, 一楽重雄

**■難易度の目安 ☆**

みなさんは, 魔方陣を作ったことがありますか？

多くの人が, 幼いころに多かれ少なかれ魔方陣に触れたことがあるでしょう. $3\times3$ の魔方陣や, $4\times4$ の魔方陣であれば, 力ずくで作り上げることも可能です. しかし, 本書では $n \times n$ の魔方陣を様々な数学的アプローチにより作ることを目標としています.

皆さんがご存知の通り, 魔方陣とは正方形の方陣に異なる数を 1 つずつ, 縦の列も横の列もその和が等しくなるように配置したものです. 本書では, まずこれを組み合わせ論のみで考えることにより, 第 1 章で早々に奇数 × 奇数の魔方陣の作り方が示されます. しかし, 偶数 × 偶数の魔方陣はそう単純ではありません. 第 2〜4 章では, 偶数 × 偶数の魔方陣を作っていきます. ここからは, 幾何的なアプローチをとります. 幾何といっても, 中学や高校で慣れ親しんでいる幾何（ユークリッド平面における幾何）ではなく, 点が有限個であるような「平面」における幾何を考えていくことになります. 普通の考え方では, 有限個の点からなる集合を「平面」とみなすことはできません. しかし, ユークリッド平面と同様のいくつかの性質を持つ点と直線の集合である「アフィン平面」を考えると, 有限個の点からなる集合も「平面」と考えることができます. ここでは有限個の点からなるアフィン平面を考え, ユークリッド平面と同様に座標を導入します. この座標には, 有限個の数であり四則演算が自由に考えられるような有限体と呼ばれる数体系が用いられます. 更に「平行線に沿って数を並べる」などの幾何的な考え方で数を規則正しく配置することで, 偶数 × 偶数の魔方陣も, 第 1 章で用いたプロセスと同様にして作ることができるのです. 魔方陣を試行錯誤ではなく, 体系的に作れる喜びを味わうことができるでしょう.

第 5 章以降では, 魔方陣というテーマから離れ, 第 2 章〜第 4 章までで学んだアフィン幾何学を出発点として, 射影幾何学について考えていきます. 射影平面がユークリッド平面と大きく違うのは, 「任意の 2 直線がただ 1 点で交わる」ところです. この違いが, 射影平面に特有の様々な性質をもたらしてくれます. 第 5 章以降では, この興味深い射影平面について学んでいきましょう. 第 8 章では, 射影幾何やアフィン幾何の様々な応用例が載っています. ここでは, 実験計画法やゲームの対戦相手の組み合わせ方など, 組み合わせ論と結びつく興味深いテーマが扱われています. セミナー当日は, 進度に応じて, その中からいくつか選んで読みたいと思います.

本書は, 副題に「魔方陣から現代数学へ」とある通り, 魔方陣という比較的親しみやすい題材を通して, アフィン平面や射影平面などの, 応用範囲の広い幾何学について学ぶことのできる本です. 説明は一つ一つ丁寧で, 誰でも知っている当たり前のことを出発点として, 様々な定理を証明しながら進めてくれます. 予備知識は中学校程度の数学を理解していれば十分です.

(文責：松原 瑠香)

## 4 組合せゲーム理論入門 - M. H. Albert(著), R. J. Nowakowski(著), D. Wolfe(著), 川辺治之 (訳)

**■難易度の目安 ☆**

この本は, ゲーム理論というタイトルですが, 相手との協力や駆け引きなどを扱うゲーム理論 (ナッシュ均衡点などを扱うもの) ではなく, 組合せゲーム (完全情報 2 人ゲーム) について扱っています. この組合せゲームというのは, 「二人の対局者が交互に手を打ち, サイコロや切り混ぜたカードといった偶然に左右される道具は使わず, 対局者の手番がきたときにそのゲームの現在の状況が完全に開示されている (手札が見えている) もの」です. 有限手数でゲームが終了しどちらかのプレイヤーが勝つという条件も加えると, 組合せゲームは先手必勝または後手必勝となります. 組合せゲーム理論では, 先手と後手のどちらのプレイヤーに必勝法があるかなどについて考えていきます. 代表的な組合

せゲームとしてニムが挙げられます. ニムとは, 最初いくつかの石の山 (石をいくつか集めたもの) があり, 二人のプレイヤーが, 一つの山を選んでそこから石を好きな個数だけ取り除くということを交互に繰り返し, 最後の石をとった方が勝ちというゲームです. このように単純なゲームでありながら, Grundy 数などの美しい数学と関連しています.

ニムについて扱っている本は多くありますが, この本では他にもいろいろな多くのゲームが扱われています. また, 300 ページほどある本なので, 前半は組合せゲームになじめるように簡単な話からはじまっていて, 後半は組合せゲーム理論のかなり踏み込んだ話題まで扱っています. 具体的には, 温度測定法, 原子量などの発展した話題を扱っていて, 組合せゲームについて多少学んだことがある人にとっても目新しい内容がたくさんあると思います. 必ずしも最初から読む必要もないので, 参加者のレベルに合わせてどこを読むか決めていくことになると思います. 予備知識は特に必要ありません. ゲームというなじみやすい題材なので, はじめて数学の本を読む人でも読みやすいのではないかと思います.

(文責：吉田 健祐)

## 5　射影平面の幾何学 - 郡敏昭

**■難易度の目安 ☆**

皆さんが中学や高校で習う通常の幾何学は, ユークリッド幾何学と呼ばれるものです. 幾何学とは図形の性質を調べる学問ですが, より正確に言えば, 図形に対してある「変換」を施したときに, 変換前と変換後で変わらない性質を調べる学問だといえます. たとえばユークリッド幾何学では, 図形に対して平行移動, 回転, 対称移動などを施すことを考え, その前後で変わらない性質 (2 つの角の角度が等しい, 2 つの線分の長さが等しい, 2 つの図形が合同である, など) を調べています.

さて, 射影幾何学とは「ある図形を別の平面に『射影』してもそのまま成立するような性質」を調べる幾何学です. いきなりですが, ガラス板の上に平面図形を描き, このガラス板を電球にかざしてみると, 床にはどんな影が映るでしょうか？ たとえば, ガラス板上の直線は, 床に直線の影を作ります. 同じことですが, ガラス板上で同一直線上にある 3 点は, 床上でも同一直線上の 3 点となります. このように, ガラス板上の図形を床へ映す操作を「射影」と呼びます. この言葉を使うと, 前の文は「射影によって『3 点が同一直線上にある』という性質は変わらない」と言い換えることができます. しかし, 射影によって変わってしまう性質も多数あります. たとえば, 交わる 2 直線のなす角度は変わってしまいますし, 線分の長さも変わってしまいます. また, ガラス板上の円は, 床の上では「二次曲線」と呼ばれる曲線になってしまいます (楕円, 放物線, 双曲線という言葉を聞いたことのある人もいるかもしれませんが, これらはいずれも二次曲線です). 射影幾何学は, 3 点が同一直線上にある, 3 直線が 1 点で交わる, 二次曲線と直線が接している, など,「射影」の前後で不変な性質を調べる幾何学です.

本書では, タイトルの通り, 射影幾何学の中でも平面上の射影幾何学のみを扱います. 第 1 章, 第 2 章で, 射影幾何学と, その舞台である射影平面の導入を行います. 射影平面とは, 直観的には「通常の平面に『無限遠点』と呼ばれる点たちを付け加えた平面」といえます. 射影幾何学では, 角度を考える意味がなく,「2 直線が平行である」という性質は意味をもちません. そこで, 平行な 2 直線も無限

に遠くで交わっている, ということにしましょう. あらゆる方向を向いた直線の無限の彼方に「無限遠点」と呼ばれる点があると考え, それらを通常の平面に付け足そうというわけです. 第 3 章では, 射影や配景写像といった図形的な道具を導入し, 射影幾何の基本定理と呼ばれる重要な定理を証明します. 第 4 章では, パップスの定理やデザルグの定理など, 平面図形に関するいくつかの定理を, 配景写像を用いて簡潔に証明していきます. 点や直線を「辿る」ことで証明が進んでいき, 学校で習う幾何とは違う, 新鮮な感覚を味わえるでしょう. 第 5 章では双対原理, 第 6 章では二次曲線を扱います. 双対原理とは, 「ある命題が成り立っていれば, その命題の『点』と『直線』, 『結ぶ』と『交わる』を一斉に入れ替えた命題も成り立つ」という, 射影幾何学の美しい特質です. セミナーでは, 少なくとも第 4 章の終わりまで, さくさく進めば, 読了を目標に読み進めることになるでしょう.

要求される予備知識については, 高校で習うベクトルと行列にある程度慣れていれば十分でしょう. 慣れていなくとも, チューターが適宜補うことにより読み進めていくことができると思います. また, 本書に登場する写像や同値類の考え方など, シンプルなものの高校では習う機会の少ない概念についても, チューターが指導するので心配ありません. とくに, 上述したような平面射影幾何学の独特さや美しさは, 中学生レベルの知識であっても味わうことができるでしょう. 射影幾何に興味があるものの予備知識に少し自信がないという人は, ぜひ本書を選んでみて, わからない点は遠慮せずチューターに質問するようにしてもらえればよいと思います.

(文責：吉田 雄紀)

## 6　楕円曲線論入門 - J. H. Silverman(著), J. Tate(著), 足立恒雄 (訳), 小松啓一 (訳), 木田雅成 (訳), 田谷久雄 (訳)

**■難易度の目安 ☆☆**

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の形の方程式が与えられたとき, この方程式をみたす点 $(x, y)$ 全体のなす曲線を楕円曲線と呼びます. このような曲線が与えられたとき, この曲線に有理点 ($x$ 座標も $y$ 座標も有理数である点) や整点 ($x$ 座標も $y$ 座標も整数である点) がはたして存在するか, また存在するなら無限個か有限個か, という興味ある問題が発生します. 一般にこのような問題に答えることは簡単ではありません. 例えば, $y^2 = x^3 - 5x$ 上には無限個の有理点がありますが, $y^2 = x^3 - x$ 上には $(0,0), (1,\pm 1)$ の 3 個しかありません.

楕円曲線特有の性質として, 曲線上にある 2 点を「足し合わせて」新たな点を得る操作が存在し, さらにこの操作による有理点と有理点の「和」はまた有理点になるというものがあります. 例えば, $y^2 = x^3 - 2$ 上の有理点として $(3, 5)$ はすぐに見つかりますが, この点を「2 倍」すると $(\frac{129}{10^2}, \frac{383}{10^3})$, さらにこれを「2 倍」すると $(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3})$ になり, 簡単には見つからない有理点が次々と計算できます. この点と点の「和」から, さまざまな楕円曲線の深い性質が導かれます.

本書の前半部分では, 楕円曲線およびその上の「加法」の定義をし, 与えられた楕円曲線のすべての有理点はある有限個の点を足し合わせることで得られる (群論の用語を用いれば, 「有理点のなす群は有限生成である」) という Mordell の定理など, 興味深い定理を証明していきます. セミナーではこの部分を読み進めることになるでしょう. 丁寧に説明されていますので, はじめて楕円曲線に触れる人でも問題なく読み進められると思います.

代数・数論・幾何と様々な分野が融合しますが, 高等な予備知識は特に必要ありません. 高校レベルの座標幾何と多項式の微分を知っていれば十分でしょう. 「 (可換) 群」について多少知っているとよいですが, 必須ではありません.

(文責：峰岸 龍)

## 7 Topology from the Differentiable Viewpoint - John W. Milnor

**■難易度の目安 ☆☆☆**

著者のミルナーは 1962 年のフィールズ賞受賞者であり, 20 世紀を代表する数学者の一人です. 彼の執筆した数学書はどれも有名ですがこの本はそのうちの幾何学入門のものです. 幾何学とは「図形」を調べる学問です. つまり, 「図形」が何かをまず決める必要がありますが, この本で考えるのは多様体とよばれるものです.

多様体とは何かを簡単に説明するために, 曲面について考えてみましょう. 曲面のなかには, 球面のように穴を持たないもの, 浮き輪やコーヒーカップ (の表面) のように 1 つの穴を持つものがあります. さらには, 穴を 100 個くらい持つ複雑な曲面もあります. このように曲面のかたちにはいろいろな可能性がありえますが, すべての曲面に共通する性質として「各点の十分近くをみると 平面とおなじ姿をしている」ということがいえます. 曲面のこの性質に注目して「各点の十分近くで $n$ 次元ユークリッド空間とおなじ姿をしている」図形を考えることができます. 2 次元ユークリッド空間は平面に他ならないので, これは上でのべた曲面の性質を素直にとりだした概念になっているわけです. これが $n$ 次元多様体の考え方です.

曲面の例からも想像されるように, 多様体には様々な形があり, それらの性質をうまく調べていくことになります. その際に基本的になるのが, 2 つの多様体 $M, N$ に対して $M$ から $N$ への「変換」を調べることです. (「変換」をより正確に述べると, $M$ から $N$ への写像でよい条件を満たすものです). このとき, その様子をとらえる「写像度」という整数やその変種を考えることができます. これらの厳密な定義は簡単ではないですが, 非常に有効な概念となります.

本書は, この「写像度」を縦糸にして, 多様体の定義といった最も基本的なことからかなり高度な話題（枠付きコボルディズム）までが一気に書かれた非常に面白い本です. 多くの節において, 抽象論をしてから具体的な事柄 (例えば, 代数学の基本定理) に応用をしてみせる, という構成になっており, 楽しみながら読むことができるでしょう. セミナーで最後まで読み切ることは難しいでしょうが, 同じような議論を繰り返しつつ, より深い性質を学んでいくという流れも分かりやすいのではないかと思います.

予備知識としては線形代数と微分および位相の初歩さえ身につけていれば, (必要であればチューターの助けを借りて) 読むことができるでしょう.

(文責：越川 皓永)

# 8 A Classical Introduction to Modern Number Theory - Kenneth Ireland, Michael Rosen

**■難易度の目安 ☆☆**

この本では"classical"という題名の通り, 19 世紀以前に発見された対象に題材をとりつつ多岐にわたる内容を取り扱っています. そして, 整数論の長きにわたる歴史を重んじ, 各章の冒頭部や末尾の付記においてその章の内容の起源から最近の成果に至るまでの歴史的経緯を紹介している点が特徴としてあげられます.

たとえば, 「平方剰余の相互法則」という法則を聞いたことがある人もいると思います. これは $x^2 \equiv a \pmod m$ が解をもつかという問題を解決する法則であり, ガウスによって 1796 年 4 月 8 日に証明されました. しかしながらこの証明は $x^3 \equiv a, x^4 \equiv a, \ldots$ の解について同様に議論するためには適さないものであり, より普遍的な証明を求める努力が続けられた過程の中で 3 次, 4 次の相互法則はそれぞれ $\{a + b\omega \mid a, b$ は整数, $\omega$ は 1 の原始 3 乗根 $\}$, $\{a + bi \mid a,\ b$ は整数, $i^2 = -1\}$ という通常の整数よりも広い世界で考えたほうがすっきり記述できることがわかりました (この 3 次, 4 次の相互法則の証明は本書の 9 章で与えられており, しかも余談ながら類書にはあまり含まれていない内容です). さらにこれらの世界の一般化として「代数的整数」という概念が発達し, 現在では整数論の研究の主要領域の一つに成長しています.

本書は内容の異なる次の 4 つの部分に大きく分けられ, セミナーの進め方は参加者の意見に応じて融通が利くのではないかと思います.

第 1 章から第 5 章では素因数分解の一意性, 合同式, 原始根, 平方剰余の相互法則といった初等的な話題が簡潔にまとめられています. 比較的有名な事実が多いため, 参加者のレベルによってはこの部分を飛ばし気味に読むことも可能でしょう.

第 6 章から第 9 章では上で挙げた 3 次や 4 次の相互法則をはじめとした代数的整数論の導入がなされ, さらに第 12 章から第 14 章にかけては相互法則の (制限された形での) $p$ 次への拡張であるアイゼンシュタインの相互法則が証明されています.

第 8 章はまたディオファントス方程式 (整数係数多変数高次不定方程式のことで, 有名なフェルマーの最終定理に登場する $x^n + y^n = z^n$ もその一つです) の理論への入門ともなっていて, 第 10 章, 第 17 章, 第 18 章でさらに詳しく解の有無やその個数に関して考察を加えています.

そして第 11 章, 第 15 章, 第 16 章ではゼータ関数が話題の中心であり, 有限体上でのゼータ関数やベルヌーイ数, ディリクレの算術級数定理 ($(a, m) = 1$ のとき, $p \equiv a \pmod m$ なる素数 $p$ は無限に存在する) などについて扱われています.

セミナーに参加するに当たっては, 高校 2 年生程度の数学に加え, 初等的な整数論に (数学オリンピックやその他の入門書で) 触れたことがあるほうが望ましいでしょう. 抽象代数や微積分の知識を要する部分もありますが, セミナー前に説明をした上で全員がついてこられるように読む部分を決めますので必須ではありません.

「初等整数論と進んだ話題の体系的学習とのギャップの橋渡しをする」という著者の意気込み通り, 他の入門書に比べても少ない予備知識で高度な話題に近づけるよう配慮された本だと思います. 整数論に興味のある生徒の参加をお待ちしています.

(文責：清水 元喜)

## 9　The Symmetric Group - Bruce E. Sagan

**■難易度の目安 ☆☆**

本書のテーマは「対称群の表現論」です．群とは対称性を記述するための抽象的な数学的概念で，($n$ 次の) 対称群とよばれる群は (区別のつく $n$ 個の) ものの順序を自由に入れ替えるということに対応します．また群の表現とは，ラフにいうと線形代数においてその群，対称性が具体的にどう現れるかを考えたものです．(群やより一般の代数などの) 表現は，数学の様々な場面に現れ応用されるだけでなく，物理や化学でも用いられるなど現在では非常に重要な概念となっています．

表現論の目標はいくつかありますが，その一つが既約表現と呼ばれる表現をすべて決定することです．既約表現とは，表現を「分解」しきったものであり，表現を理解するためには既約表現を知ることが重要なステップとなります．対称群の表現論の目標の一つも対称群の既約表現を何らかの形ですべて得る，または具体的に実現しようというものです．

対称群の表現論には多くのアプローチが知られていますが，この本は 3 通りの方法を紹介しています．まず Chapter 1 で (有限) 群の表現論の一般論の基礎事項を説明した後，Chapter 2 では Chapter 1 の結果の対称群の場合への応用，Chapter 3 では組合せ的アルゴリズム，Chapter 4 では対称関数を中心に対称群の表現論を展開しています．

表現論では代数的な手法が用いられることが多いですが (この本の Chapter 1 もそう)，対称群の表現論においては Young 図形という組合せ的対象が活躍し興味深い理論が展開されます．例えば，Chapter 2 では対称群のすべての既約表現は Young 図形を使って具体的に作ることが出来ることなどが示されます．実際のセミナーではこのあたりまで読めるのではないかと思います．余裕があれば，後半のトピックを選んで読むことも可能かもしれません．

予備知識としては群・線形代数の基礎を仮定します．ただし，群については必要な事項は少ないためチューターに説明してもらえば十分対応できると思います．

(文責：滝聞 太基)

## 10　Lie Groups, Lie Algebras, and Representations - Brian C. Hall

**■難易度の目安 ☆☆☆**

本のタイトルを直訳すれば「リー群・リー代数・表現」となります．

群とはものの対称性を表した代数的な概念です．例えば，正方形は $90°, 180°, 270°$ の回転をしてももとの正方形に重なりますが，このとき正方形は $90°, 180°, 270°$ 回転に関する対称性をもっていると思えます．そして，$90°, 180°, 270°$ 回転から正方形の対称性を表した群が作れます．一方，円形は任意の実数 $t$ について $t°$ 回転してももとの円に重なります．つまり，円の対称性を表す群は連続的なパラメーター $t$ をもちます．大雑把に言って，リー群とは上記のように有限個の連続的なパラメーターを伴う対称性を表す群で，代数的な構造だけなく幾何的な構造ももっています．

一方，リー代数とはリー群のもつパラメーターの値をわずかに動かすという操作に対応した代数的な概念で，新たな演算をもった有限次元のベクトル空間になりその代数的な構造はリー群の情報を反

映します．リー環はリー群のもつ情報をあまり失わずに, ベクトル空間になるので線形代数によってリー群よりも扱いやすいという長所があります.

表現論は, 抽象的な群を具体的な対称性として実現 (表現) したり, その実現の仕方が本質的にどのくらいあるか調べたり, それらの実現の仕方と群の間の関係について調べる分野で, 現代数学や現代物理学の広い範囲で大きな役割を担っています.

本書はこれらの概念についての入門書で, リー群やリー環が行列全体の空間の一部として書かれているものしか扱いません．この制限により, 本来は幾何学 (とくに多様体論) の言葉を学ばないと記述・証明できないことが, 行列の計算をすることで証明できたりします．本書のレベルでは証明を与えることはできず説明に留まりますが, この制限は強すぎる制限にはなっていませんし, 一般のリー群に対しても成り立つ事実が扱われています．また, 具体例も豊富なので, 具体的な計算により理解を深めやすい本になっています.

予備知識として線形代数の基本的なことは仮定されていますが, 行列を“ 基底の固定された有限次元ベクトル空間の間の線形写像 ”と思えればほぼ十分なので, 実際には行列の計算ができて, 数列の収束や微積分に関して高校で学ぶ程度の理解があれば読み進められるでしょう.

(文責：浅野 知紘)