2011年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 10 冊です.

1. 数え上げ組合せ論入門 - 成嶋弘
2. 復刊 数理論理学 - 松本和夫
3. 多項式のラプソディー - 西山享
4. 電磁場とベクトル解析 - 深谷賢治
5. 代数的トポロジー - 枡田幹也
6. ベルヌーイ数とゼータ関数 - 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信
7. 箱玉系の数理 - 時弘哲治
8. Codes and Curves - Judy L. Walker
9. Beginning Functional Analysis - Karen Saxe
10. Number Theory - Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich

洋書を読むにあたって

8, 9, 10 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから 1 冊ずつ内容を紹介していきます. なお, セミナーで本を担当する人と, 紹介文を書いた人とは異なる場合があるのでご了承ください.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1 数え上げ組合せ論入門 - 成嶋弘

■難易度の目安 ☆

数え上げ組合せ論とは, 「…をみたす…はいくつあるか」という問いを扱うものです. この手の問題は高校数学の範囲でも頻繁に出題されますがその定型的な考え方というものはなく, 個々の問題を解く際にはセンスと経験がものをいう分野と言えます.

有名なものとしては

> x と y を n 個ずつ一列に並べる. このとき, 任意の自然数 $k\,(\leqq 2n)$ について, 左から k 番目までに存在する x の数が左から k 番目までに存在する y の数以上であるようなものはいくつあるか

というものや

> a 個の玉を b 個の箱に入れる方法は何通りあるか

という問いを玉を「区別できる」か「できない」か, 箱を「区別できる」か「できない」か, 箱への入れ方として「箱に 2 個以上の玉を入れない」か 「すべての箱に 1 個以上玉を入れる」か「制限なし」という $2 \times 2 \times 3$ 通りの状況について考えるものなどがあります.

前者の解はカタラン数とよばれており, $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ であることが知られています. 後者は高校数学でもよくみられるものですが, これを玉と箱に関して抽象化し, 集合の間の写像ととらえたものを写像 12 相と言います (写像に関する説明は本書内で行われています).

本書は, 前半でカタラン数や写像 12 相などの有名な順列・組合せとそれらを解く際の考え方, 定理などを取り上げています. 後半では「群」という概念を導入することによって, 前半では個別に扱っていた問題をある程度統一的に扱う手法を取り上げています. 本書は専門的な理論を述べるというよりは, 考え方が提示され, 具体的な問題にそれを適用することで, その有用性を確認するという流れが主体です. 数学的な議論はさほど難しくないため, あまり専門書を読み慣れていない人にはちょうどいいと思います.

予備知識は特に仮定しません. ですが, 後半で母関数というものを扱う際に微積分などを使用しているので, 微積分の概念を知っているといいかもしれません (微積分を知らなくても読み進めることは十分に可能です).

(文責：岸川)

2　復刊 数理論理学 - 松本和夫

■難易度の目安 ☆

論理学とは, 正しい命題から別の正しい命題を導く推論法則を研究する学問で, 哲学の分野に位置するとされています. 数理論理学とは, それを数学に限定したもので, 数学における証明の構造を (数学的に) 研究する学問です. たとえば, 我々は数学を営む上で次のような推論法則を用いることがあります：

(対偶法) 命題「A でない $\Longrightarrow$ B でない」から命題「B $\Longrightarrow$ A」が従う.

(背理法) 命題「A でないと仮定すると矛盾が生じる」から命題「A」が従う.

(三段論法) 命題「A $\Longrightarrow$ B」と命題「B $\Longrightarrow$ C」から命題「A $\Longrightarrow$ C」が従う.

実際, これらの推論法則は通常用いられている「命題論理」や「述語論理」とよばれる論理体系において正しい推論法則です. ここで注意したいのは, これは「命題論理」や「述語論理」において「正しい」と約束したから正しいのであって, 約束を超えた正しさではありません. 以下この意味で「正しい」という言葉を使うとき, 「」をつけて表すことにします.

ここで次のような自然な疑問が生まれます：

(1) 推論が「正しい」かどうかを機械的に判定する方法があるか.

(2) 推論法則はどのくらいあれば事足りるか.

(3) 「正しい」とされる推論法則どうしで不都合な推論が生じないか.

まずは (1) について. これは「正しい」推論をどのように定義すればよいかという根本的な問いです. (1) の問題をきれいに扱う 1 つの方法が意味論と呼ばれるもので, 真理値表という表を用いて推論の「正しさ」を定義します. また, この定義において重要なのは「正しい」「正しくない」の判断が機械的にできるという点にあります.

次に (2) の問題について. まず, 「正しい」推論法則から新しい「正しい」推論法則が得られることがあることに注意しましょう. たとえば, (四段論法) なる推論法則を考えてみましょう：

(四段論法)「A $\Longrightarrow$ B」と「B $\Longrightarrow$ C」, 「C $\Longrightarrow$ D」から「A $\Longrightarrow$ D」が従う.

これは (1) において「正しい」推論法則とされます. そして重要なことは三段論法から導くことができるという点です. (1) において「正しい」とされた推論法則をすべて集めてきたのち, そのうち他から導出される法則を削っていき, どこまで切り詰められるかを考えるのが (2) の問題となります.

最後に (3) の問題について. これは (1) の定義が妥当であるかどうかを問う疑問でもあります. 数理論理学において「無矛盾性」の問題といわれています.

本書では, この (1), (2), (3) の問題を根本に据えながら, 数理論理学における基本的な概念を展開しています. また, 数理論理学の応用として自然数論の無矛盾性を示しているのも本書の特徴です. セミナーでそこまで進めるかどうかは分かりませんが, 証明に必要な概念はすべて揃うのではないかと思います.

この本を読むにあたって, 予備知識は特に仮定しません.

(文責：中村)

3　多項式のラプソディー - 西山享

■難易度の目安 ☆

本書は, 高校生などを対象に, 「学校の数学, 受験の数学と違った数学を感じてもらう」という目的で作られた「はじめよう数学」というシリーズの内の一冊です (内容的には他の本とはつながりがあるわけではありません).

シリーズの名前の通り, いわゆる数学書という感じではなく, 著者が読者に語りかける形式で書かれています. そのため, 数学書を読み慣れている人にはかえって読みづらいかも知れませんが, いままで本格的な数学書を読んだことがない人にとっては, 読みやすいのではないかと思います.

内容は, 序曲・主題・変奏の 3 つの部分に分かれています. 「序曲」では, 複素数・二項係数 ・対称式 (変数を入れ替えても変わらない多項式) といったさまざまな話題が多項式と関連付けられて書かれています. 具体的には, 二項係数に関するいくつかの等式や, 対称式が基本対称式 (2 変数の場合なら $x+y$, xy) の多項式で書けることを証明したり, 対称式を利用することで 3 次方程式を解いていたりします. 「主題」では, 主に調和多項式というものの性質を調べています. n 変数多項式に対し, 変数を入れ替える (対称群を作用させる) ことを考えると, 全く変わらないのが対称式であるのに対し, 調和多項式はこの作用の本質を反映しているようなものです. 調和多項式と対称式を調べることで, この作用をよく理解することができます. 「変奏」では, 複素数成分の 2×2 の正則行列 (逆行列をもつ行列) 全体が多項式にどのように作用するかを見ます. これは「主題」と対応する話題でもあり, ここでも不変式 (上の場合での対称式にあたるようなもの), 調和多項式などの概念が現れます.

この本には, 多項式という身近な話題から数学のいろいろな部分を覗いてみて, 興味をもったらそこを自分で掘り進めていってほしいという著者の考えから, 「この分野に興味をもった人はこれを読むと良い」という参考文献が多く載っています. そのため, セミナーが終わった後にもこの本に関連した自習がしやすく, 意欲のある人にはおすすめです.

セミナー当日は, 最初から順に読んでいって「主題」の終わりまでは進めたいと思っています. もしくは集まった人が希望するようなら, 「序曲」のいくつかの話題をとばして, 「変奏」にも入るかもしれません.

また, この本の中では (高校範囲の) 微分や行列, 複素数などを使うことがありますが, ほとんど形式的なものとしてしか扱わないので, これらのことを知らなくても適宜補足をしていけば問題ないと思います. よって, 予備知識としては多項式の扱いに慣れていること (中学生レベル) で十分です.

(文責：井上)

4　電磁場とベクトル解析 - 深谷賢治

■難易度の目安 ☆☆

ベクトル解析はベクトル場についての微積分学で, 電磁気学などの物理学とともに発展しました. ベクトル場とは空間の各点に, ベクトル (矢印) が対応しているもので, 電磁気学に登場する電場や磁場はその例です. ベクトル場はベクトルの成分をみることで, 空間内に関数が複数個あるものと思うことができ, その関数の微分や積分を考えることはできますが, それだけでは, ベクトル場の微積分学

としては不十分です. たとえば, 3 次元空間で各点に同じ大きさの下向きのベクトルが対応しているベクトル場を考えてみます. これを, 空間に下向きの力 (重力とよぶことにします) が均等にかかっている状況だと思うことができます. この空間内で水平方向に一定距離直進する運動と, 真下に同じ距離直進する運動を考えてみます. この 2 つの運動では後者の方が前者より "らく" です. 運動の軌跡 (線分) に沿ったこの場の積分を単に 3 つの関数をそれぞれ積分したものと思ってしまうと, どちらも同じ定数関数を同じ長さ積分することになりこの "らくさ" (重力から受けた仕事) の違いはとらえられません. ベクトル解析では, 運動の方向と力の向きが一致しているかも考えて, この "らくさ" を与えるような曲線 (運動の軌跡) 上の積分を扱います.

この本は, 3 つの章に分かれています. 第 1 章と第 2 章でそれぞれ平面, 3 次元空間におけるベクトル解析を扱います. 第 1・2 章では, ベクトル場の微分や, 曲線や曲面上での積分を定式化し, 高校で学ぶ微積分学の基本定理に対応した重要な定理を証明します. 第 3 章では電磁気学をベクトル解析の言葉で記述し, 電磁気学の問題と数学の問題のかかわりについても学びます. 全体を通して図形的・物理的なイメージを持ちやすいように書かれており, 複数種類あるベクトル場の微分を理解しやすくなっています.

予備知識は, 高校程度の微積分と行列の知識です. 物理学の知識は必要ありませんが, 高校初級程度の物理学を知っていると, (特に第 3 章では) 本書の内容をより楽しむことができるでしょう. また, 多変数の微積分について少し (偏微分, ヤコビ行列など) 知っているとよいですが, 知らなくてもチューターが適宜補うので, 読み進めることができると思います.

(文責：浅野)

5　代数的トポロジー - 枡田幹也

■難易度の目安 ☆☆

はじめて聞くと想像しにくいかもしれませんが, 代数的トポロジーは幾何学の一分野です.

幾何学においては様々な図形を何かしらの基準の下で調べるということが多くなります. 図形をゴムのように伸ばしたり縮めたりしても変わらないような情報を図形から取り出す, というのがトポロジーの基本的な考え方です. 有名な例は, ドーナツ (の表面) とコーヒーカップ (の表面) というのは連続的に変形していくと同一視でき, その共通する大きな性質は「穴が 1 つ」というものです. このようなことをより複雑な曲面や高次元の図形に一般化した理論を記述するのがこの本の目的の 1 つになります. そのような一般化を行うには, 代数の言葉や理論を用います (そのため "代数的" トポロジーと題しています).

本の内容は大きく分けると 3 部構成になっています. 第 1 部はトポロジーの考え方に慣れるための導入的な部分であり, オイラー数や回転数と呼ばれる基本的な概念について説明しています. 第 2 部は上で触れた理論を "特異ホモロジー群" と呼ばれるものを使って, 代数の基礎から展開しています. 第 3 部はさらに発展的なトピックを扱っています.

セミナーでどの部分を読むかは分かりませんが, 第 1 部は厳密さを欠く部分もあるので, 内容をある程度把握してから第 2 部を読み進めるのがいいかもしれません. 予備知識はほとんど仮定していないようですが, 位相空間や加群 (アーベル群) に慣れていると読みやすいと思います.

(文責：越川)

6　ベルヌーイ数とゼータ関数 - 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信

■難易度の目安 ☆☆☆

次の漸化式で定義される有理数 B_n を, ベルヌーイ数といいます：

$$\sum_{i=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_i B_i = n+1 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

たとえば小さな n に対する B_n の値は, 次のようになっています：

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \ldots.$$

定義を見ても, なぜこんなものを考えるのか想像もつかないでしょうが, 実はこの一連の有理数は数学の (特に整数論の) 多くの場面に現れます.

たとえば

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

のようなべき乗和の公式を 4 乗以上にも一般化したとき, その係数はベルヌーイ数を用いて記述できることがわかります. また, 自然数のべき乗の逆数の和 $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$ について

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2, \quad \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4, \quad \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6, \quad \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8, \quad \zeta(10) = \frac{1}{93555}\pi^{10}$$

などの公式が知られていますが, この公式の右辺にもベルヌーイ数が現れます (この両方とも, セミナー中に証明することができるでしょう). 他にも L 関数と呼ばれる数論的関数の特殊値や, 虚 2 次体の類数にベルヌーイ数が現れます.

このような, ベルヌーイ数が現れる話題を, 本書では多岐にわたって解説しています. 整数論の書物でベルヌーイ数を主軸に扱った本はほとんどないので, 整数論の非常に特別な部分を深く調べるマニアックな本というイメージを持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. どちらかというと, ベルヌーイ数そのものを調べることよりも, 2 次体やゼータ関数などの整数論的対象から出発することが多く, ベルヌーイ数以外の部分についても丁寧な解説が与えられているため, 整数論について豊富な知識を身につけることができます. また, 組合せ・解析・代数といった幅広い手法を用いるという点でも, 多くの数学的刺激を受けながら楽しく学べる一冊だと思います.

予備知識として, 漸化式やシグマ記号への慣れ, (高校で習うレベルの) 微積分の知識を仮定します. また必須ではありませんが, べき級数を知っていると読み進めやすいでしょう. 一部複素解析を用いる部分もありますが, 必要最低限のことは, セミナー中にチューターが解説するので補えると思います.

ベルヌーイ数に興味を持った方, べき乗和の公式や $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ などの値に興味を持った方, あるいはゼータ関数や 2 次体などの発展的な整数論の話題に興味がある方の参加をお待ちしています.

(文責：西本)

7　箱玉系の数理 - 時弘哲治

■難易度の目安 ☆☆☆

この本は箱玉系と呼ばれる離散的なモデルに関わる数学の入門書です.

世の中の現象を数学的モデルで表そうとすると, 時刻と位置を定めたときの数量を (多変数) 関数でおくことになります. 実は, この関数のおきかたには大きく分けて次の 3 種類があります (時間と空間の次元の和を d とおき, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表します)：

- $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $\mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $\mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}$.

1 つめは連続的なモデルであり, たとえば物理法則を微分方程式で表す場合がこれに含まれます. それに対し, 変化を微分 (つまり, グラフの傾き) でなく, 隣接するマスの値の差として計算し, 時刻も 1 ステップごとに進むようにしたものが 2 つめであり, 時間や空間を十分細かく分けたときには, 1 つめと同様なのですが, そうでない場合は似た方程式であっても, たとえばカオスなどの異なる現象があらわれてきます. そして, 関数のとる値も離散的にしたのがセルオートマトンと呼ばれる 3 つめです. この 3 種類のモデルの取り方の違いによって, 異なる現象がおきるという話題もあるのですが, 同じ現象となるよう別の種類のモデルにとりかえるにはどのようにすればよいかという話題がこの本ではとりあげられます.

ソリトンという「粒子的なふるまい」をする波が 1834 年に (水面の) 波として発見され, 当時知られていた通常の (線型に振る舞う) 波の理論では説明できないものでしたが, 後に KdV 方程式と呼ばれる非線形微分方程式によって, ソリトンが記述できるようになりました. これは (微分方程式なので) 連続的なモデルですが, 離散的なモデルでも 1990 年に箱玉系というソリトンのあらわれるセルオートマトンが発見されました. KdV 方程式と箱玉系は見た目が大きく異なるにもかかわらず, 実は, 超離散化と呼ばれる操作によってこの 2 つのモデルが結びついていました.

この本は, 3 章までが箱玉系の導入, 4 から 6 章が上で述べたような箱玉系と KdV 方程式の関連性にあてられており, セミナーでは少なくともここまでを読み進めることを目標にします. 7 章以降はそれぞれ, 箱玉系に関するいろいろなトピックとなっており, 戸田方程式という別の方程式との関わりなど, 著者の言う「箱玉系の持つ数理の豊かさ」が紹介されています. この本を読むためには, 多変数関数の微積分の知識が必要です.

(文責：片岡)

8　Codes and Curves - Judy L. Walker

■難易度の目安 ☆

この本のテーマとなっている “符号 (code)” とは, 文字や数字などの列 (の集合) のことです. 身近なところでは, 電話番号, 本の裏表紙に必ず付いている ISBN という番号 (たとえばこの本の ISBN は 0-8218-2628-X), ASCII などの文字コードなどが例として挙げられます.

電話番号の場合, 数字が 1 つ間違っていたり入れ替わったりすると違う人に掛かってしまいますが, ISBN ではそのようなことは起きません. ISBN の最後の 1 桁は前の 9 桁の数字から決まる「チェック用」の数字 (または文字) になっていて, これによって, 数字が 1 つ間違っていたり 1 組入れ替わっていたりというエラーがあった場合, そのような数字列を ISBN としてもつ本は存在しないため, エラーだと識別することができるようになっています. しかし, ISBN では, エラーを発見できても自動的に修正することはできず, また, 複数のエラーが重なった場合には別の本の IBSN になってしまい, エラーだと識別できないこともあります. もちろん, チェック用の桁を増やしたり同じ数字列を複数回繰り返すことでエラーの発見・修正の精度を上げることは可能ですが, 情報を持たないチェック用の桁を増やせば増やすほど, 非効率になります.

そこで, 符号理論では, どのように符号化すれば効率がよく, より多くのエラーを発見したり修正したりできるのか, という問題を考えます. この分野では従来, 組合せ論や群論を用いていましたが, 比較的最近, 代数幾何を用いる手法が考案されたことにより, 飛躍的な進歩を遂げました. この本では, 符号理論, 代数幾何について学んだあとに, "良い" 代数曲線を用いて定義された符号について考えます. ここで用いられる代数幾何は, 「有限体上の代数曲線」というもので, $f(x,y)=0$ という 2 変数の方程式を有限体上で考えること ($\bmod p$ で考えることの一般化) に相当します.

必要な代数学の知識は, 付録の部分に練習問題付きでまとめられているので, 予備知識は特に必要ありません. また, 本文は 44 ページ (付録を入れても 63 ページ) ととても短い上, 練習問題が豊富で, 自分で具体的な計算をして概念に慣れながら読み進めやすい入門書なので, 初めて洋書を読んでみようという人にもおすすめできる本だと思います. 本の内容以上のことについて自分で研究する上でのヒントも付いているので, この本を読んで興味を持ったことについて, 夏季セミナー後に考えてみるのもいいでしょう.

(文責：安田)

9 Beginning Functional Analysis - Kalen Saxe

■難易度の目安 ☆☆

この本は, 題名のとおり「関数解析学」と呼ばれる分野の入門書です. 「関数解析学」は, 主に関数をベクトルとみなし, 解析学 (微積分) における関数の性質を観察する学問です.

高校数学でベクトルというと, 平面や立体空間上の矢印や点のようなものとして表され, ベクトルの演算として足し算・定数倍・内積・絶対値を考えることができます. 逆に, 関数にこれらの演算をうまく定めてしまいさえすれば, 関数を空間上の点や矢印のように扱え, 関数を図形的にとらえることができるのです. ただし, ここでいう「空間」とは必ずしも 3 次元空間のように目に見えるものであるとは限りません.

関数解析の応用例として, デジタル音源や医療画像に使われる「フーリエ級数論」を挙げます. まず, 3 次元空間上すべてのベクトル (x,y,z) は, 直交軸上にあるベクトル： $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$ に分解できます. 次に, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で定義された連続関数からなる「空間」を考えます. すると, この「空間」の要素である関数 $f(x)$ は, 定数と可算個の波の関数の和

$$f(x) = c + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad ☆$$

に分解できることが分かります. つまり, 定数と波の関数が「空間」の直交軸の働きをしているわけです. その際に,

- 係数 a_k, b_k, c が「内積」で決定できる
- 等式☆の右辺と左辺の差の「絶対値」が 0 に収束する

という証明法をとります. このように, 図形の概念を使って関数の分析ができることが関数解析の利点です.

この本では, 前半の 3 章で関数解析に使う道具を紹介し, 基礎固めをします. そこで得る「コンパクト性」や「ルベーグ測度」などの知識は他分野でも大いに役立つものですから, 丁寧に読み進める価値があります. 後半の 3 章で, 関数解析を使った定理の証明をします. 上述の「フーリエ級数論」は第 4 章で出て来るものです. 最後の章では, 確率論や量子工学など, 7 つの分野で関数解析が応用されています. ここにおいても, 「x が有理数のとき連続かつ無理数のとき不連続となる関数 $f(x)$ は存在しない」などの興味深い定理が示されています.

第 5 章であつかう「作用素理論」はレベルが他より高いので, セミナーは第 4 章を第一の目標に進めて, 余裕の度合いで第 5 · 6 章のうちどれをやるか決める, といったことになると思います. 予備知識としては, 微積分やベクトルの概念を理解していれば十分です (他, 複素数や固有値の概念がわかるとなおよいでしょう).

(文責：久良)

10 Number Theory - Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich

■難易度の目安 ☆☆☆

皆さんが知っている「実数」とはなんでしょうか. 高校数学で実数の定義が厳密になされることはあまりありませんが, 実数とは, 収束する有理数の列だと思うことできます. 例えば, $\sqrt{2}$ という実数は, $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$ という数列だと思えます. つまり, $\sqrt{2}$ という数に「近づいていく」数列を考えるわけです. ここでいう「近い」というのは, 「差の絶対値が小さい」ということですが, この普通の絶対値とは違った p 進絶対値 (p は素数) というものを考えることができます. p 進絶対値とは, p で割りきれる回数が多いほど小さい (0 に近い) と思ったものです. 例えばこの p 進絶対値については, $1, p, p^2, p^3, \ldots$ という数列は 0 に収束するわけです. ここで, さきほどの実数と似たように, p 進絶対値について収束する有理数の列を考えます. これが p 進数です. p 進数の世界では, 実数と似たように加減乗除の演算ができることがわかります. したがって, 方程式に p 進数解があるかどうか, などといった問題を考えることができます.

この p 進数を考えることのメリットの 1 つに, 次の Hasse-Minkowski の定理があります：

> a, b, c を有理数とするとき, $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ が有理数解 (x, y, z) をもつことは, これが実数解をもち, かつすべての素数 p について p 進数解をもつことと同値である (ここでいう解とは $(0, 0, 0)$ 以外のものを考えている).

方程式が p 進数解を持つかどうかというのは, 方程式が $\bmod p^k$ $(k=1,2,\ldots)$ で解を持つかどうかということに対応しています. つまり, 有理数の世界だけで考えると難しい方程式の解の存在が, それよりもわかりやすい実数の世界と $\bmod p^k$ の世界 (つまり p のべきで割った余りの世界) での解の存在に言い換えられるわけです.

p 進数を定義して p 進数の性質をいくらか調べた後, この Hasse-Minkowski の定理 (上では 3 変数で書きましたが, 一般に n 変数でも成り立ちます) を証明するというのがこの本の第 1 章の目標です. セミナーでは, この証明まで進むことができると思います.

p 進数, p 進絶対値といった概念は, 実数や普通の絶対値に慣れてしまっていると初めはわかりにくいと思う人も多いかもしれませんが, p 進数の世界では実数の世界にはない現象が起きたり, p 進絶対値のほうが普通の絶対値よりある意味では扱いやすい場面もあったりして, 少し慣れると面白く感じられると思います.

予備知識としては, 簡単な合同式の計算ができれば十分です. 群・環・体などという言葉が出てくるところもありますが, 知らなくても (少なくとも第 1 章を) 読み進める上であまり支障はなく, また必要ならばセミナー中に補うことができるので, 心配ないと思います. 本の付録にもいくらか説明があります.

(文責：関)