2010年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 10 冊です.

1. ゲーム理論入門 - 鈴木光男
2. 位相への 30 講 - 志賀浩二
3. 結び目の数学 - コーリン・C. アダムス (著) 金信泰造 (訳)
4. ルベーグ積分 30 講 - 志賀浩二
5. 無理数と超越数 - 塩川宇賢
6. リー代数入門―線形代数の続編として― - 佐藤肇
7. 組合せ論入門 - G. ポリア, R. E. タージャン, D. R. ウッズ (著) 今宮淳美 (訳)
8. Algebraic Topology - William Fulton
9. The Symmetric Group - Bruce E. Sagan
10. Galois Theory - Emil Artin

洋書を読むにあたって

8,9,10 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的に全ての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は（通常の）英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

1　ゲーム理論入門 - 鈴木光男

ゲーム理論とは, 非常に簡単に言うと, 人間の行動決定について数学的に考えよう, という学問です. もう少し詳しく言うと, 「何人かのプレーヤーがいて, それぞれがいくつかの行動を選ぶことができ, 各プレーヤーが選んだ行動の組に応じて, 各プレーヤーの利得が定まるという状況において, 他のプレーヤーの行動まで考慮すると, どの行動が利得を最大にするか. 」という問題を数学的に扱おう, ということです.

有名な例として, 次の「囚人のジレンマ」があります：共犯と思われる 2 人の囚人がいて, 2 人とも「黙秘」と「自白」の 2 つの行動のどちらかを選ぶことができるが, 2 人で相談することはできない. 2 人とも黙秘すれば 2 人とも 1 年の刑, 一方だけが自白すれば自白したほうが無罪でもう一方が 5 年の刑, 2 人とも自白すれば 2 人とも 3 年の刑である.

さて, このとき 2 人の囚人はどちらの行動をとるでしょうか. もし黙秘した場合, 相手も黙秘してくれたら 2 人とも 1 年ですみますが, 自白されてしまうと自分は 5 年の刑をくらってしまいます. 2 人とも自白という行動の組を考えると, 「自分が黙秘に変更しても自分の利得は増えない」と両者が思います. この意味で, 2 人とも自白という行動の組は「均衡点」であると言えます. また, このような均衡点はこれ以外にはないことも分かります. この例においては, 2 人とも自白という行動の組よりも 2 人とも黙秘という行動の組のほうが両者にとって利得が大きいにもかかわらず, 2 人とも自白という行動の組に落ち着くと考えられるわけです.

このように, 「自分以外のプレーヤーがその行動の組にしたがうならば, 自分から進んでその行動の組から逸脱しようとは思わない」とすべてのプレーヤーが思うような行動の組のことを「ナッシュ均衡点」といいます. 冒頭に書いたような「ゲーム的状況」を数学的に定式化し, そのゲームにおいてこの「ナッシュ均衡点」が存在するかどうかを考えるのが基本的な目標となります. 各プレーヤーの選ぶことのできる戦略の個数が有限のとき, ナッシュ均衡点は必ずしも存在するとは限りませんが, 各戦略を確率的に選ぶという状況を考えると必ずナッシュ均衡点が存在することが証明できます. この事実は重要で面白い性質と言えるでしょう.

ゲーム理論は, 純粋数学として発展しているだけでなく, 工学, 経済学, 社会学, 政治学などといった実学への応用が著しい学問です. この本は割と数学的に厳密に書かれていますが, 予備知識はほとんどいりません. 中学数学程度で十分読めると思います.

（文責：関）

2　位相への 30 講 - 志賀浩二

この本では距離空間や位相空間というものを扱っています. これらは点集合の点同士の「近さ」「繋がり」といったものを抽象化した概念で, 現代の数学を記述する上で欠かせない道具となっています.

直線や平面など, 数学で扱うものにはさまざまな「形」のものがあります. しかし, そういったものをただ「点の集合」と考えるだけでは, たとえば先にあげた直線と平面などは本質的に同じものということになってしまいます. これらのものを我々がイメージする際には, ただ点の集合というだけではなく, それらがどのように「繋がっているか」ということを含めて考えているわけです.

この「点たちの繋がり方」のようなものを考えるための概念が位相空間です. 本書ではまず直感的にわかりやすい「距離空間」から入ります. これは直線や平面などにおける距離の概念を一般化したもので, 距離があることにより点列の収束や関数の連続性, 開集合・閉集合などといった基本的な概念を定義することができます. 位相空間は距離空間よりもさらに一般的な概念であり, そのため位相空間の一般論は幅広い応用をもちます.

本書ははじめは直線・平面やその部分集合といったなじみやすい対象を扱い, そこでの話を距離空間や位相空間へ一般化していく, という構成をとっています. 1つ1つの章も短いため, 読みやすい本なのではないかと思います.

予備知識は, 集合についての基本的な記法を知っている程度で大丈夫でしょう. 冷静に論理を追えば読み進められると思います.

（文責：渡部）

3　結び目の数学 - コーリン・C. アダムス (著) 金信泰造 (訳)

一本の紐を適当に絡ませて両端を繋いだものを結び目といいます. 例えば, 紐で片結びや縦結びや蝶結びやもやい結びなどを作った後に両端を繋いだものや, 最も単純な例としては紐を絡ませずに両端を繋いだ輪ゴムのような形をしたものなどがあります.

例えば蝶結びを作って両端を繋いだ結び目がほどけることは簡単にわかりますが, いくつかの結び目が紐を切ることなく（輪ゴムのような形に）ほどくことができないことは直観的あるいは経験的にわかると思います. しかしそれをどうやって証明すればいいでしょうか. その方法として, まず平面上に描いた結び目の絵（射影図）において「紐を切らない変形」という操作を定義し, そのような操作で不変であるような何らかの「量」を考えることで結び目を区別するということが考えられます. 例えば何らかの方法で結び目の射影図に対して整数を対応させ, それが「紐を切らない変形」で不変なものだったとします. このとき, ある結び目の射影図に対応する整数と輪ゴムのような形の結び目の射影図に対応する整数が異なるなら, その結び目は紐を切ることなくほどくことができないということがわかります.

この本の最初の 6 章では, 非常に多くの種類がある結び目を系統的に分類するいくつかの方法や, 3 彩色可能性, 結び目解消数, 多項式不変量と言ったさまざまな結び目の不変量を扱っています. 互いに移りあわない結び目を完全に区別できる不変量はまだ知られていませんが, 割と優れた不変量としてここで出てくる多項式を対応させるものがあります. その後の 4 章では生物や化学への応用やグラフ理論との関連などの独立した話題を扱っています.

この本の特徴としては, あまりかっちり書かれた本ではないし例も豊富でとっつきやすく, また予備知識も特に必要ないので初めての人向けではないかと思います.

（文責：滝聞）

4　ルベーグ積分 30 講 - 志賀浩二

図形（平面上の点の集合）が与えられたとき，その大きさを調べる指標の一つになるのが「面積」です．初等幾何で登場する図形については,「円の面積＝半径×半径×円周率」のように定めてきましたが，一般の図形に対しては，図形ごとの特別な性質によらない面積の定め方を考えなければなりません.

高校で習う積分（リーマン積分という）はその解決法の１つとなっていて，連続関数のグラフに囲まれた図形の面積を定めることができます．しかし，リーマン積分は「図形を軸に垂直な無数の直線で分割する」という発想で計算するため，限られた図形の面積しか求めることができません．例えば，$\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Q},0\leqq x,y\leqq 1\}$ という点集合を考えると，面積を定める困難さが感じられると思います.

ものの量を測る最も単純な方法は,「1 つ，2 つ，……」と数えることなのですが，図形上に点は無限に存在するため，この方法は使えません（例えば，1 辺 1 の正方形上の点と 1 辺 2 の正方形上の点が 1 対 1 対応してしまいます）．ここで，面積とはどのようなものだったかに立ち返ってみましょう.「1 辺 1 の正方形の面積は 1」や,「2 つの図形の重ならない和集合の面積はもとの面積の和となる」や,「図形を平行移動したときに面積は変わらない」といった性質を持っていることが期待され，実際，そのような性質が成り立つように，長方形，三角形の面積を順に定めていったわけです．これを上手に一般化すると「ルベーグ測度」という概念に到着し，上で挙げた例をも含む様々な図形の面積を定めることが可能になります．また，ルベーグ測度を用いて，リーマン積分の拡張となっているルベーグ積分を定義することができます.

本書は，ルベーグ測度やルベーグ積分の入門書で，基本的な事項から丁寧に説明されています．極限の記号や操作に慣れているほうが読みやすいと考えられますが，リーマン積分は本書中で（ルベーグ積分の前に）扱われるため,「まだ積分を勉強したことがない」という人も読むことができるでしょう.

（文責：片岡）

5　無理数と超越数 - 塩川宇賢

中学校で習うように, 全ての実数は「有理数」「無理数」の 2 種に分類されます. これは, ある数が整数の比で表せるかという基準による分類で, 無理数は, 整数の比で表せる有理数に比べれば代数的に複雑な数だということができます.

数の代数的な複雑さによる分類には, 「有理数」「無理数」の他にも「代数的数」「超越数」というものがあります. 具体的にはある整数係数の方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0)$$

の解となる数を代数的数と, ならない数を超越数といいます. 超越数は, 無理数の中でも特に複雑な数ということになります.

高校までに習う数の中にも無理数・超越数はたくさんあります. 例えば

$$\pi,\quad e,\quad \log_2 3,\quad 2^{\sqrt{2}},\quad \cos 1$$

などは全て超越数ですし,

$$\sqrt{2}, \quad \cos 1^\circ$$

などは超越数ではありませんが, 無理数です. また, 集合論的にも「ほとんど全ての実数が無理数・超越数である」ということが知られており, 無理数・超越数は実はそこら中に溢れています.

しかし, 皆さんが無理性を証明できる数は, 実はかなり少ないのではないでしょうか？例えば e や π が無理数だという事実は聞いたことがあっても, 証明の方法は全く想像がつかないという人も多いでしょう. 超越性の証明ともなると, なおさらのことだと思います. そういった様々な数の無理性・超越性の証明が, 本書では幅広く紹介されています. 1つ1つの証明も独特で面白いですし, テーマも分かりやすいので, 中高生の皆さんでも興味を持って楽しく学べると思います.

また, 無理数・超越数論の結果のいくつかは, 方程式の整数解を調べる問題などにも応用されています. 例えば本書の 3 章で扱われている Roth の定理を用いて, 定数 k に対して $x^3 - 2y^3 = k$ の整数解 (x, y) が有限個しかないことを示すことができます. このような, 無理性・超越性の判定という問題意識からは意外な応用があるのも無理数・超越数論の面白さの1つだと思います.

本書は最初からきちんと読み進めていかなくても, 読みたいトピックを選んで読める本なので, セミナーでは e や π など高校生でもよく知っているであろう数の無理性・超越性の証明を優先的に読んでいきたいと思います. 1つ1つの証明がやや長めのものが多いので, 数学書に親しみがないと苦労も多いと思いますが, 諦めず丁寧にコツコツ読み進めていきましょう.

本書を読むにあたっての予備知識ですが, 少なくとも高校範囲の微積分を十分に理解していることを仮定します. 他に一部の定理の証明には複素関数論・線形代数の初歩を使うのでこれらの知識があると理想的ですが, 知らなくても適宜チューターが説明します.

（文責：西本）

6　リー代数入門—線形代数の続編として— - 佐藤肇

本書は, リー代数 (リー環とも呼ばれる) の理論の一風変わった入門書です. リー代数はリー群というものと深い関わりがあり, 両者の理論は数学・物理学の最前線でも非常に有効に活用されています.

本書の特色の一つとして, 例が非常に豊富であることが挙げられます. 定理などの結果を抽象的なままで終わらせず, それらを具体的な例で計算して確かめることにより, 理解が深まるように工夫されています.

また理論の展開についても必要以上に抽象的にならないよう工夫がされていて, いくつかの用語の定義, 特にリー代数の定義が通常のものと異なります. 通常のリー代数の定義は, 一般の線形空間である条件をみたすものというものですが, ここでは複素数を成分とする行列の空間に限定しています. このため, 抽象的な線形代数の議論が行列を使った具体的なものとなり, 分かりやすくなっています. 定義を変えてしまってはまずいのではないかと思う人もいるかもしれませんが, その点に関しても問題ありません. (本書では証明されない) いくつかの定理によって, 本書の定義と一般的な定義が実質的には同じものを表していることが分かるのです.

本書ではこのようにリー代数の理論がなるべく具体的な形で説明されているので, 数学の専門書をあまり読みなれておらず, 抽象的な概念が次々と出てくると混乱してしまうという人に向いていると思います.

本書を読むにあたっては「線形代数の続編として」という副題の通り, 線形代数の基礎知識（線形空間・線形写像・行列の対角化など）が必要となります. しかし定義とごく基本的な性質程度しか使わないので, 行列について高校で習うことを知っていれば, チューターの解説を受けることによって読み進められると思います. ただし, 本書の大きな目的の一つは線形代数が数学の理論において実際どのように応用されるのかということを見るところにあるので, 線形代数について知らないが本書を読んでみたいという人は夏季セミナーの前に大学 1 年生向けの線形代数の教科書を眺めてもらえると望ましいです. どの教科書にも載っているような基本的なことしか使わないので, 書店で市販されているどのようなものでも構いません.

100 ページ程度の薄い本なので, セミナー期間中にほぼ読み終われるのではないかと思います.

（文責：栗林）

7　組合せ論入門 - G. ポリア, R. E. タージャン, D. R. ウッズ (著) 今宮淳美 (訳)

本書は, 組合せ論と呼ばれる分野のさまざまな話題について, 入門的事項を扱っています. 組合せ論とは,「○○をみたす□□は何通りあるか」「○○をみたす□□は存在するか否か」「○○をみたす□□を 1 つ構成せよ」という形の問題に対応する分野です.

たとえば, 以下のような問題は, 皆さんお馴染みかもしれません：

> 赤いビーズ 4 個, 青いビーズ 3 個, 黄色いビーズ 2 個を円形に繋ぎ合わせてブレスレットを作る. 回転や裏返しで同じとなるものを区別しないとき, 何通りの異なるブレスレットが考えられるか.

この問題は一見, 裏返しも考えるため単純計算ではうまくいかず, 場合分けを考えたり調べ上げたりして解くしかないかのように見えます. しかし, 本書で紹介されている「ポリアの数え上げ理論」を用いると, この種の問題を一般的に解決することができます.

組合せ論には,「人が何人かいて, 各 2 人に対し知り合いかどうかが決まっている」「空港がいくつかあり, いくつかの空港間に直行便がある」といった状況を数学的に扱う「グラフ」という道具について研究する理論もあります. グラフにまつわる話題として, 本書には「ラムゼイの定理」「マッチング」などが登場します.

本書は, 図や具体例が多く, 難しい定理の証明よりも実用例に重点がおかれていて, 堅苦しさがありません. またセミナーでは, 参加者の興味に応じて読み進めるトピックを選ぶことになると思います. 予備知識も不要なため, 数学書を読むのに慣れていない人, 身近な例を楽しみたい人に是非お勧めの一冊です.

（文責：保坂）

8 Algebraic Topology - William Fulton

代数的位相幾何学とは, 空間や空間の間の写像の性質をそこから取り出した ”代数的なもの” を見ることによって調べる分野です. この本では代数的位相幾何学の様々な手法を 2 次元空間の場合に豊富な例とともに解説しています.

”代数的なもの” として, 皆さんになじみ深いものとして整数があげられます. 円周から平面上への連続写像を考えると, 円周は平面の上に 1 つの閉じた道を描きます. 道の上にない各点に, その道が点の周りを何周するかを表す回転数という整数を定義できます. この回転数について考察すると, 例えば「円板から円周への連続写像で, 円周上のどの点も動かさないものは存在しない」ということがわかります. さらに回転数の考え方を曲面上の滑らかな流れに応用すると, 「球面上に風を吹かせると, 必ず風速 0 の点が現れる」ことが示せます. 写像や空間をそのまま扱うのではなく, そこから代数的なものを取り出して考えることで, 問題解決や, 応用がしやすくなるのです.

また, この分野およびこの本では ”代数的なもの” として, より抽象的なものを多く扱います. 曲面上の 1 点を出発してもとの場所に戻ってくるなめらかな道を考えましょう. 球面上の道は, どの 2 つも連続的にずらして重ね合わせることができますが, 無限に伸びた円柱の表面上では, 1 点の近くに小さく輪を描く道と円柱の周りを 1 周してくる道は連続的な変化で決して一致しません. 始点が同じで連続的にうつりあわない道たち全体は”掛け算”を定義することで, 基本群という代数的な対象とみることができます. 例えば, さきほどの球面と円柱の基本群は異なります.

この本では他にも, オイラーの多面体公式, ホモロジー群, コホモロジー群, さらにリーマン面について扱われており, セミナー中に全て消化するのは不可能ですが, 最初から順に読み進めていく必要もないので, 参加者の興味やレベルに合わせて扱う内容を決めたいと思います.

この本を読むにあたって予備知識として, 2 変数の微積分, 位相の初歩を仮定します.

（文責：浅野）

9 The Symmetric Group - Bruce E. Sagan

本書のテーマは「対称群の表現論」です. 群とは対称性を記述するための抽象的な数学的概念で,（n 次の）対称群とは (区別のつく n 個の）ものの順序を自由に入れ替えるということに対応します. また群の表現とは, ラフにいうと線形代数においてその群, 対称性が具体的にどう現れるかを考えたものです.（群やより一般の代数などの）表現は, 数学の様々な場面に現れ応用されるだけでなく, 物理や化学でも用いられるなど現在では非常に重要な概念となっています.

表現論の目標はいくつかありますが, その一つが既約表現と呼ばれる表現をすべて決定することです. 既約表現とは, 表現を”分解”しきったものであり, 表現を理解するためには既約表現を知ることが重要なステップとなります. 対称群の表現論の目標の一つも対称群の既約表現を何らかの形ですべて得る, または具体的に実現しようというものです.

対称群の表現論には多くのアプローチが知られていますが, この本は 3 通りの方法を紹介しています. 具体的にいえば, Chapter 2 では群の表現論の一般論, Chapter 3 では組合せ的アルゴリズム, Chapter 4 では対称関数を中心に対称群の表現論を展開しています. Chapter 1 では必要な（有限）

群の表現論の一般論の基礎事項を説明しています. 一般の表現論は代数的ですが, 対称群の表現論においては Young 図形という組合せ的対象が活躍し興味深い理論が展開されます.

実際のセミナーでは基本的に表現論の一般論とその対称群への応用を学ぶことになると思います. 余裕があれば, 後半のトピックを選んで読むことも可能かもしれません.

予備知識としては群・線形代数の基礎を仮定します. ただし, 群については必要な事項は少ないためチューターに説明してもらえば十分対応できると思います.

（文責：越川）

10 Galois Theory - Emil Artin

みなさんは 2 次方程式の解の公式を知っていることと思います. 3 次方程式, 4 次方程式にもやや複雑ではあるものの, やはり解の公式が存在します. それぞれ 16 世紀に発見されたもので, 発見者の名前をとってカルダノの公式, フェラーリの公式と呼ばれています. 「では, 5 次以上の方程式に対しても解の公式が存在するだろうか」, この問いはその後の数学者を駆り立てることになります. しかし, この問いを解決するには歴史的に見て 300 年近くの年月を必要としました. それは, 抽象代数学 (群論, 体論など) の構築を必要としたからだといわれています. ともあれ, 19 世紀前半になって, 最初にアーベルがこの問題を否定的に解決しました. 即ち「5 次以上の方程式には解の公式が存在しない」ことを証明したのです. そしてその数年後にガロアはアーベルの証明を大幅に簡略化することに成功します. ここでガロアが用いた抽象代数学の理論が「ガロア理論」と呼ばれているものです.

ガロアの発想で重要なことは次の 2 点に要約されます.

1. 問題を数学的に定式化, 抽象化したこと.
2. その抽象化によって現れる 2 つの代数的構造 (体, 群) の間に対応を見出したこと (ガロアの基本定理).

1 つ目について例をあげると, 「解の公式をもつ」ということをどのように定義すればよいのかということが挙げられます. これは, 「解が, 与えられた代数方程式の係数と四則演算と冪根 ($\sqrt[m]{\cdot}$) を有限回用いて表示できること」と定義されます. このように, 問題を純代数的な言葉に置き換えることが必要なわけです. 2 つ目は体 (四則演算が定義されている数学的対象) に関する理論で, 本書で詳しく解説されています.

本書は次の 3 章構成になっています.

1. 線形代数
2. 体論
3. 応用

1 章 (線形代数) では, 体の定義から始めて, 体論の展開に必要な線形代数の知識をコンパクトにまとめています. これは, 高校で習うベクトルや行列の延長に当たるものです. 2 章 (体論) は本書の半分以上を占めており, ガロア理論を含む体の理論を展開しています. 幾分抽象的な印象を受けるかも

しれませんが, どの証明も丁寧に書かれているので, そこまで難しくはないと思います. そして 3 章 (応用) で, 2 章の応用という形で方程式の可解性を扱います. また, その他の応用としてコンパスと定規を用いた作図問題が扱われており, 有名な「角の三等分の不可能性」を証明してます.

セミナーでは解の公式の不可能性の証明を目標に, 2 章で必要のない部分は適宜省略しながら読むことになるでしょう. 100 ページに満たない薄めの本ですので, セミナー期間中に大部分を読み終えることができると思います.

予備知識としては, 複素数の演算や, 一般の大きさ (n 行 n 列) の行列の計算ができれば問題ありません.

（文責：中村）