# 2022年度JMO夏季セミナー 本の紹介

**数学オリンピック財団**
JMO夏季セミナー実行委員会

今年度の夏季セミナーで扱う本は以下の9冊です.

1. 平方剰余の相互法則：ガウスの全証明 - 倉田令二朗
2. 石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係 - 佐藤文広
3. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Robert Devaney
4. 楕円曲線論入門 - Joseph H. Silverman, John Tate
5. 複素関数入門 - 神保道夫
6. 線形代数と数え上げ - 高崎金久
7. 漸近挙動入門：太鼓の形を聴くために - 高橋陽一郎
8. The Symmetric Group - Bruce E. Sagan
9. Using the Borsuk–Ulam Theorem - Jiří Matoušek

このうち1冊を選び, 同じ本を選んだ数人の班員で**セミナー**を行います. 選んだ本について, 内容を分担して持ち回りで発表していきます. 夏季セミナーの最後には, 学んだことについてまとめて全体に発表します. それぞれの班には専属のチューター (数学オリンピックのOB/OG) が付き指導にあたるので, 安心してください.

セミナーで使う本はこちらで用意しますので, 事前に購入する必要はありません. 班分けは初日に行います.

次のページから, それぞれの本で扱う内容や前提知識などについて詳しく紹介していきます.

## 洋書を読むにあたって

3, 8, 9は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりでまったく分からないのではないかと思うかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての用語は必ず定義が述べられるので, 知らない用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学校で習う程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるとよいでしょう.

洋書の選択を考えている人は，英和辞典を持参するとよいかもしれません．通常のものでもよいですが，数学英和辞典があるとより便利でしょう．なお，数学英和辞典はこちらでも何冊か用意して貸し出しますので，新たに買う必要はありません.

### 「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). そもそも, 様々な尺度が存在する本の難易度というものを厳密に三段階に分けることが無理を含んでいるのです. 夏季セミナー初日には, 担当のチューターによる本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください (なお, 紹介文の執筆者が当日も同じ本の担当になるとは限りません).

## 1　平方剰余の相互法則：ガウスの全証明 - 倉田令二朗

**■難易度の目安 ☆**

奇素数 $p$ と, それと互いに素な整数 $a$ について, $x^2 \equiv a \pmod{p}$ をみたす整数 $x$ が存在するとき $a$ は $p$ を法として**平方剰余である**といい, 存在しないとき**平方非剰余である**といいます. このとき,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (a\text{ が }p\text{ を法として平方剰余のとき}) \\ -1 & (a\text{ が }p\text{ を法として平方非剰余のとき}) \end{cases}$$

と定めると (これを**ルジャンドル記号**といいます), 相異なる奇素数 $p$, $q$ に対して以下が成り立ちます.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

これは**平方剰余の相互法則**とよばれます. これに加えて,

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \qquad \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

という性質を用いて (前の 2 つはそれぞれ**第一補充則**, **第二補充則**とよばれます) ルジャンドル記号を計算することで, 平方剰余であるか否かを機械的に判定することができます.

たとえば, 「$x^2 + y^2 = p$ なる正の整数 $x$, $y$ が存在する奇素数 $p$ の条件は何か？」という有名な問題があります. これは $(x/y)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ と変形されることから, $\mathrm{mod}\, p$ において $-1$ が平方剰余か否かを考えることが重要となります. このように, 平方剰余は整数論の様々な場面で重要な役割を果たします.

平方剰余の相互法則を最初に証明したガウスは, 生涯に 7 種類の独立した証明を与えており, 本書にはその 7 種類の証明がすべて載っています. 同じ定理の証明を 7 種類も把握するのは一見すると無意味に思えるかもしれませんが, それらを通じて, 二次形式や円分多項式など様々な整数論のトピックを学ぶことができます. さらに, 第 6 の証明は立方剰余や 4 乗剰余にも拡張できるものなので, 平方剰余の相互法則をより高い視点で見られると思います. ガウス自身も, 立方剰余や 4 乗剰余につながる証明を模索するために, 様々な手法で平方剰余の相互法則を証明したという経緯があります. この 7 種類の証明を知ることによって, ガウスの数学思想も知ることができます.

本書の第 0 章に初等整数論の基本事項が載ってはいますが, 整数の扱いや mod の計算にはある程度慣れていることが望ましいでしょう . また, 整数以外では, 群・環・体の定義や, 二次の行列の計算 (第 2 の証明で使います) について簡単に学んでおくことが望ましいです. 興味のある方は事前に, 整数論の基本の部分 (フェルマーの小定理, $\mathrm{mod}\, p$ における乗法の逆元の存在, 第一・第二補充則あたり) を勉強しておくことをお勧めします.

(文責：坂本 平蔵)

## 2　石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係 - 佐藤文広

**■難易度の目安 ☆**

皆さんのほとんどは, きっとオセロや五目並べなどといった簡単なゲームで遊んだことがあるでしょう. こうした伝統的なボードゲームには, どのような共通点があるでしょうか？例えば「プレイヤーが二人である」「偶然性に依存しない」「すべての情報が完全に公開されている」「必ず有限の手番で終了し, 結果が勝ち・負け・引き分けのいずれかである」などがあげられるでしょう. こうした性質をもつゲームは**組み合わせゲーム**とよばれ, 理論上は両プレイヤーが最善を尽くした場合の帰結をかならず決定することができます.

この本では, こうした組み合わせゲームのなかでも特に, 「どちらか一方が勝つ (引き分けがない)」「同一の盤面に対して, 両プレイヤーが可能な行動が同じである」という性質をもつ**不偏ゲーム**について扱います. 不偏ゲームは先手必勝または後手必勝に分類することができるので, これを数学的に考えていくことが目標となります. 実際に, その背景には様々な美しい代数的性質があることが知られています.

代表的な例として**ニム**があげられます. ニムとは, 次のような不偏ゲームです.

- いくつかの石からなる「山」がいくつかある.
- 1 つの山を選んでそこから石を好きな個数だけ取り除くことを, 二人のプレイヤーが交互に行う.
- 最後の石をとった方が勝ちとなる.

このような単純なゲームの必勝法の背景には, ゲームの状態を表す **Grundy 数**や, 複数のゲームを「足し合わせる」演算である**ニム和**など, 美しい数学が広がっています.

本書では, はじめの 3 章でニムを用いてニム和や Grundy 数の導入を行い, 4 章以降ではニムに類似した様々なゲームを考察します. また 12 章では, 逆に最後に石をとった方が負けとなるゲーム (**逆形**) を通じて, 組み合わせゲーム理論の踏み込んだ話題にもふれています. 本の後半では各章が独立した内容を扱っているため, 参加者の好みに応じて読む範囲を決めていくことになると思います. 予備知識は特に必要ありません.

（文責：床呂 光太）

## 3　An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Robert Devaney

**■難易度の目安 ☆☆**

本書のタイトルを和訳すると「カオス力学系入門」となります. **力学系**とは, 一定の規則に従って時間の経過とともに状態が変化していく様子のことです. 例えばビリヤードで球を突くと, 球は力学の法則に従って運動し, $t$ 秒後の球の位置や運動が数学的に記述できます. このように, 状態が連続的に変化していく力学系のことを連続力学系といいます. 一方で, 数列の漸化式や関数の反復合成のように, 状態がとびとびに変化していくものは**離散力学系**と呼ばれ, 本書では後者の離散力学系, 特に関数の反復合成に関連する力学系を扱います.

力学系のうち, その状態の変化が「ランダム」なように見える振る舞いをするものは, **カオス力学系**と呼ばれます. カオスの定義として最も本質的なものは**初期値鋭敏性**です. 先ほどのビリヤードの例において, 球を突く方向をほんの僅かに変えただけでも, 十分に時間が経つと球の運動は全く異なるものになります. このように, どれだけ小さな初期値の変化でも, 十分先での状態に大きな影響を与えるような性質を初期値鋭敏性といいます. この性質によって, 力学系の十分先での状態は近似的にでも予測できないものとなり, この意味で「ランダム」となります.

本書の前半では, 実数から実数への関数の反復合成によって得られる力学系 (**1 次元離散力学系**) の性質を調べていきます. その例の 1 つとして, $f(x) = \mu x(1-x)$ で表される**ロジスティック写像**を調べます. これは単純でありながらも, 力学系における様々な性質を現します.

例えば $\mu = 2$ では, 0 から 1 までのどんな実数に反復合成しても 1/2 に収束するという単純な力学系が現れます. 一方 $\mu = 5$ では, ほとんど全ての実数において $-\infty$ に発散するにも関わらず, 任意の $n$ について $n$ 回合成によって始めてもとに戻るような点 (**素周期 $n$ の点**) が存在します.

また, 1 次元離散力学系において重要な結果である**シャルコフスキーの定理**を示します. この定理は, 実数から実数への連続関数が素周期 3 の点を持つならば, 任意の $n$ について素周期 $n$ の点を持つことを主張する, とても簡潔で驚くべき結果です. セミナーではこれらの内容を主に扱うことになるでしょう.

予備知識としては, 高校で習う程度の微分が分かっていれば十分です. 一部で位相空間論を用いますが, とても簡単なものなので適宜チューターが解説します.

（文責：星野 泰佑）

## 4　楕円曲線論入門 - Joseph H. Silverman, John Tate

**■難易度の目安** ☆☆

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の形の方程式 ($a$, $b$, $c$ はほとんど任意) が与えられたとき, この方程式をみたす点 $(x, y)$ 全体のなす曲線を**楕円曲線**と呼びます. 楕円曲線が与えられたとき, その上に有理点 ($x$ 座標も $y$ 座標も有理数である点) や整点 ($x$ 座標も $y$ 座標も整数である点) がはたして存在するか, また存在するならば無限個か有限個か, という興味ある問題が発生します. 一般にこのような問題に答えることは簡単ではありません. たとえば, $y^2 = x^3 - 5x$ 上には無限個の有理点がありますが, $y^2 = x^3 - x$ 上にはなんと $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$ の 3 個しかありません.

楕円曲線には特殊な性質があります. それは, 曲線上にある 2 点を「足し合わせ」て新たな点を得る操作 (加法) が存在し, さらにこの操作による有理点と有理点の「和」はまた有理点になるというものです. たとえば, $y^2 = x^3 - 2$ 上の有理点として $(3, 5)$ はすぐに見つかりますが, この点を「2 倍」する ($(3, 5)$ と $(3, 5)$ を足す) と $\left(\frac{129}{10^2}, -\frac{383}{10^3}\right)$, さらにこれを「2 倍」すると $\left(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3}\right)$ になり, 簡単には見つからない有理点が次々と計算できます. この点と点の「和」から, さまざまな楕円曲線の深い性質が導かれます.

本書の前半部分では, 自分自身を何回か足し合わせると 0 になるような有理点は有限個しかない (群論の用語を用いれば, 「位数が有限の有理点は有限個しかない」) という **Nagell–Lutz の定理**や, すべての有理点はある有限個の点を足し合わせることで得られる (群論の用語では「有理点のなす群は有限生成である」) という **Mordell の定理**などを証明していきます. セミナーではこの前半部分から読む箇所を選ぶことになるでしょう. 時間があれば, これらの応用として, $y^2 = x^3 - x$ 上の有理点が上記の 3 つのみであることの証明まで読めるかもしれません.

丁寧に説明されていますので, はじめて楕円曲線に触れる人でも問題なく読み進められると思います. 代数・数論・幾何と様々な分野が融合しますが, 高等な予備知識は特に必要ありません. 高校レベルの座標幾何と多項式の微分を知っていれば十分でしょう. (可換) 群に対して親しみがあれば読みやすいと思いますが, 必須ではありません.

(文責：近藤 滉将)

## 5　複素関数入門 - 神保道夫

**■難易度の目安** ☆☆

この本は**複素解析**という分野の入門書です. 高校で学ぶ微積分では, 実数に対して定義され実数値をとる関数 (実関数) を扱いますが, その定義域および終域を複素数に拡張したものを**複素関数**といい, 複素関数に対して微積分の概念を拡張して考えるのが複素解析という分野です.

実関数 $f(x)$ が微分可能であるとは, 定義域に含まれるすべての $x$ について極限 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が存在することであり, この極限 $f'(x)$ を $x$ の関数とみなして $f(x)$ の導関数というのでした. $f(z)$ が複素関数の場合でも,

実関数の場合と同様に微分可能性や導関数が定義されます．ただし, 複素関数の場合は $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ という極限において $h$ を 0 に近づける方法が, 実関数の場合より「多い」ため (この表現は感覚的なものですが, 要するに複素数が複素平面で表されるように 2 次元的に広がっていることが関係して), 複素関数に対する微分可能という条件は (微分可能な複素関数は**正則関数**とよばれます) 実関数の場合よりもかなり「強く」なります．たとえば, 正則関数は 1 度のみならず何度でも微分できることがいえますし, ある点の近傍での値が分かるだけで他のすべての部分での値も決まってしまいます．

では, 複素関数に対して「積分」を考えるにはどうすればよいでしょうか？これは, ある曲線に沿って実関数の定積分と同様の値を考えることで実現され, 特に正則関数でこのような積分を考えると様々なよい性質が成り立ちます．その応用として, 実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ や $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin^2 x}\, dx$ $(a > 0)$ を (わざわざ複素数の世界に持っていくことで！) 簡単に計算することができます．複素関数の積分では, 関数 $f(z) = 1/z$ における点 $z = 0$ のように, 定義できていない点 (**特異点**) の周りの情報 (特に**留数**とよばれる値) を調べることが鍵となります．

セミナーでは, 留数を使ってある種の積分が求まるという定理 (**留数定理**) を目標にしたいと思います．余裕があれば, 発展的な話題として無限和や無限積による三角関数の表示についても読み進めることができるかもしれません．予備知識としては, 高校で習う程度の複素数や微積分の知識を仮定します．

（文責：渡辺 直希）

## 6　線形代数と数え上げ - 高崎金久

**■難易度の目安 ☆☆**

この本のテーマは**代数的組み合わせ論**です．本書では様々な組み合わせ論的等式を代数的・組み合わせ論的議論を織り交ぜた形で証明しています．例えば, この本の I 部の一つの目標である**マクマホンの公式**を取り上げてみましょう．長方形状に右下にいくほど小さくなるように数を並べることを考えてみます．一例としては,

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

のようなものです．$r \times s$ の長方形状に, 右下にいくほど小さくなるように $t$ 以下の非負整数を並べる場合の数を $N(r, s, t)$ とおきましょう．少し頑張ると, $N(r, s, 1) = {}_{r+s}\mathrm{C}_r$ や $N(2, 2, 2) = 20$ などがわかりますが, 一般式は簡単にはわからないと思います．しかし, 実は次のような綺麗な等式が知られています．

$$N(r, s, t) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=1}^{t} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}$$

本書では, この証明の道具として, 代数的な文脈から生まれた**シューア多項式**や, 非交差経路の数え上げを可能にする **LGV 公式**が導入され, 重要な役割を果たします．特に LGV 公式は他にもヤコビ–トゥルディー公式などに応用され, 組み合わせ論的証明の要となっています．

このような組み合わせ論的証明が好きな人に特におすすめです．前提知識は特にありません．強いて挙げれば, 多項式の計算や組み合わせ論的議論に慣れているとスムーズに読み進めることができるでしょう．行列式の知識が必要になる箇所もありますが, 計算の道具として使うだけです．チューターが適宜補足するので問題ありません．

(文責：神尾 悠陽)

## 7　漸近挙動入門：太鼓の形を聴くために - 高橋陽一郎

**■難易度の目安** ☆☆☆

数学者 Kac は 1966 年に「Can one hear the shape of a drum?(太鼓の形を聴きとれるか)」という論文を発表しました．この論文では題目にあるとおり「太鼓の音を聞いただけでその太鼓の形を特定することができるのか」という問題が提起されています．本書ではこの問題がテーマとなっています．

例として弦楽器, すなわち 1 次元の場合を考えると, 弦の固有振動数から弦の長さが分かるので「弦の長さは聴きとれる」と言えます．2 次元以上の場合はより複雑で, **スペクトル幾何**という分野の大きなテーマの 1 つとして現在でも研究されています．太鼓の固有振動数の情報は, 太鼓の上での熱拡散の様子から得ることができることが知られているので, 本書では熱拡散の理論を詳しく扱います．熱拡散の様子は**ランダムウォーク**と密接に関係しています．例えば $xy$ 平面において「原点にいる人が 1 秒ごとに上下左右に等確率に動くとき $t$ 秒後に点 $x$ にいる確率」は「原点にある熱量 1 が拡散していくとき $t$ 秒後に点 $x$ がもつ熱量」に対応しています．ランダムウォークは離散的な運動ですが, これの極限である**ブラウン運動**を考えると, 熱拡散の様子と完全に同じになることが本書で示されます．

さて, 本書のタイトルになっている**漸近挙動**とは関数のおおまかな振る舞いのことです．例えば $y = 2x + 1/x$ という関数は $x \to \infty$ では $y = 2x$ とほとんど同じ振る舞いをします．微分方程式の解として得られる関数は明示的な式で書けないものばかりであり, 各点での値を計算することは非常に困難です．しかし関数の漸近挙動を調べる方法はたくさんあります．熱拡散の様子を細かく捉えるのは非常に困難ですが, その漸近挙動ならば調べることが可能で, これは太鼓の固有振動数の情報を含んでいます．関数の漸近挙動を調べるというのは高校数学ではあまり扱われませんが, 本書を通じてその重要性が理解できるはずです．

本書の前半では熱拡散の理論を扱います．はじめに簡単な例であるランダムウォークを扱い, 熱拡散の挙動の本質的な部分を捉えていきます．その後に熱拡散の基本的な性質を調べ, ランダムウォークとの関係についても説明されます．後半では熱拡散の様子が固有振動数にどう反映されているのかを具体的に調べます．その際に必要となる解析学のテクニックについても詳しく解説されています．

特別な予備知識は仮定しませんが, 積分計算にかなり慣れていることが望ましいでしょう．具体的には, 置換積分, 広義積分, 極座標変換などが分かっていれば大丈夫です．また, 線形代数の基本的なことを知っているとランダムウォークの問題が考えやすくなります．熱方程式を解く際にフーリエ級数展開の理論が出てきますが, これは雰囲気だけ知っておけば大丈夫です．あらかじめインターネットなどで調べて眺めておくとよいかもしれません．

(文責：神田 秀峰)

## 8　The Symmetric Group - Bruce E. Sagan

**■難易度の目安** ☆☆☆

本書のテーマは「対称群の表現論」です．群とは対称性を記述するための抽象的な数学的概念であるといえますが, そうした群や対称性について線形代数の議論で考えたものが**表現**です．(群やその他の代数系の) 表現は, 数学の様々な場面に現れ応用されるだけでなく, 物理や化学でも用いられるなど現在では非常に重要な概念となっています．ここでは, 特に**対称群**とよばれる「ものの並べ替え」を要素とする群に対して, その表現について考えます．

表現論の目標はいくつかありますが, その一つが**既約表現**と呼ばれる表現をすべて決定することです．例えば, 2 以上の整数はすべて素数の積に「分解」され, 素数での挙動を調べることで一般の正整数での挙動が理解できることがあります．同様に, 表現を「分解」しきることで既約表現が得られ, 表現を理解するためには既約表現を知ることが重要なステップとなります．対称群の表現論の目標の一つも, 対称群の既約表現を何らかの形ですべて得ようというものです．

対称群の表現論には多くのアプローチが知られていますが, この本は 3 通りの方法を紹介しています. まず Chapter 1 で一般的な (有限) 群の表現について基礎事項を説明したのち, Chapter 2 では Chapter 1 の結果を対称群の場合に応用します. また, Chapter 3 では組合せ的アルゴリズムを, Chapter 4 では対称関数を中心に, 対称群の表現論を展開しています.

この本の Chapter 1 も含め, 表現論には代数的な手法が用いられることが多いですが, 対称群の表現論においては **Young 図形**という組み合わせ論的対象が活躍し, 興味深い理論が展開されます. 例えば, Chapter 2 では対称群のすべての既約表現は Young 図形を使って具体的に作れることなどが示されます. 実際のセミナーではこのあたりまで扱えるのではないかと思います. 余裕があれば, 後半のトピックを選んで読むことも可能かもしれません.

予備知識としては群論および線形代数の基礎を仮定します. ただし, 群については必要な事項は少ないため, チューターに説明してもらえば十分対応できると思います.

(文責：平山 楓馬)

## 9 Using the Borsuk–Ulam Theorem - Jiří Matoušek

**■難易度の目安** ☆☆☆

この本では, 表題の Borsuk–Ulam の定理というトポロジーの定理と, そのさまざまな応用が扱われます.

**トポロジー**とは, 幾何学の分野の一つです. トポロジーでは, 形を連続的にゴムのようにグニャグニャと変形させることを許します. 「ドーナツとコーヒーカップは同じ形」という話を聞いたことがある人は多いのではないでしょうか. トポロジーは, そのような変形を許したときに, どのような性質が保たれるかを考える分野といえます.

さて, **Borsuk–Ulam の定理**とは, 次のような定理です. ただし, $S^n$ は $n$ 次元球面を, $\mathbb{R}^n$ は $n$ 次元ユークリッド空間を表します.

> 任意の連続写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ において, $f(x) = f(-x)$ なる $x \in S^n$ が存在する.

たとえば $n = 2$ は「ボールを平面上に潰したとき, ボールの表面の表裏真逆の 2 点であって, 同じ点に潰されるものが存在する」などと表現できます. この定理は純粋にトポロジカルなものですが, さまざまな応用があります.

この本では, まず第 1 章でトポロジーの準備をした後, 第 2 章で Borsuk–Ulam の定理や同値な命題をいくつかの方法で示します. そして第 3 章では, そのさまざまな応用を扱います. その一つに, **ネックレスの分割問題**：

> $n$ 種類の宝石からなり, どの種類の宝石も偶数個あるような, 輪になっていないネックレスがある. このとき, これをうまく高々$n$ 箇所で切断し 2 人に分配することで, どの種類の宝石も同じ個数配られるようにできるか？

があります. これは純粋に組み合わせ論的な問題ですが, 実は Borsuk–Ulam の定理を用いて解くことができます. このように, トポロジーを組み合わせ論に応用する分野は**位相的組み合わせ論**とよばれ, この本でいくつか扱われています. 第 4 章ではさらに必要となるトポロジーの理論を補い, 第 5 章以降は Borsuk–Ulam の定理のさらなる応用を与えます. ここまで読めるかはわかりませんが, 時間があれば扱ってもよいでしょう.

この本を読むにあたっては, 位相空間論の基礎（位相空間や連続性の定義, コンパクト性, 距離など. 特にユークリッド空間の場合）を扱えることが望ましいです. 大学で学ぶ他の内容が必要な部分もありますが, それらは適宜チューターが補う予定です. また, トポロジーの知識がなくとも読めるよう配慮されていますが, 代数的トポロジーについて簡単に知っておくと, より楽しめるかもしれません.

この動画（`https://youtu.be/NdWIkKJN5PI`）では Borsuk–Ulam の定理のネックレスの分割問題への応用について扱われているので, 雰囲気を掴みたい方は見てみるとよいでしょう.

(文責：兒玉 太陽)