2019 年度 JMO 夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の 10 冊です.

1. 石取りゲームの数学 - 佐藤文広
2. 幾何の魔術 - 佐藤肇, 一樂重雄
3. 群論への 30 講 - 志賀浩二
4. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Robert Devaney
5. ガロア理論講義 - 足立恒雄
6. ルベーグ積分 30 講 - 志賀浩二
7. 結晶群 - 河野俊丈
8. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory - J.E. Humphreys
9. A Course in Arithmetic - J-P. Serre

洋書を読むにあたって

4, 8, 9 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから 1 冊ずつ内容を紹介していきます.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです :

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). そもそも, 様々な尺度が存在する本の難易度というものを厳密に三段階に分けることが無理を含んでいるのです. 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1　幾何の魔術 - 佐藤肇, 一楽重雄

■難易度の目安 ☆

みなさんは, 魔方陣を作ったことがありますか？

多くの人が, 幼いころに多かれ少なかれ魔方陣に触れたことがあるでしょう. 3×3 の魔方陣や, 4×4 の魔方陣であれば, 力ずくで作り上げることも可能です. しかし, 本書では $n \times n$ の魔方陣を様々な数学的アプローチにより作ることを目標としています.

皆さんがご存知の通り, 魔方陣とは正方形の方陣に異なる数を 1 つずつ, 縦の列も横の列もその和が等しくなるように配置したものです. 本書では, まずこれを組み合わせ論のみで考えることにより, 第 1 章で早々に奇数 $\times$ 奇数の魔方陣の作り方が示されます. しかし, 偶数 $\times$ 偶数の魔方陣はそう単純ではありません. 第 2〜4 章では, 偶数 $\times$ 偶数の魔方陣を作っていきます. ここからは, 幾何的なアプローチをとります. 幾何といっても, 中学や高校で慣れ親しんでいる幾何（ユークリッド平面における幾何）ではなく, 点が有限個であるような「平面」における幾何を考えていくことになります. 普通の考え方では, 有限個の点からなる集合を「平面」とみなすことはできません. しかし, ユークリッド平面と同様のいくつかの性質を持つ点と直線の集合である「アフィン平面」を考えると, 有限個の点からなる集合も「平面」と考えることができます. ここでは有限個の点からなるアフィン平面を考え, ユークリッド平面と同様に座標を導入します. この座標には, 有限個の数であり四則演算が自由に考えられるような有限体と呼ばれる数体系が用いられます. 更に「平行線に沿って数を並べる」などの幾何的な考え方で数を規則正しく配置することで, (4 の倍数) $\times$ (4 の倍数) の魔方陣も, 第 1 章で用いたプロセスと同様にして作ることができます. また, それ以外の場合でも (2×2 を除いて) 魔方陣を作ることができることが紹介されています. 魔方陣を試行錯誤ではなく, 体系的に作れる喜びを味わうことができるでしょう.

第 5 章以降では, 魔方陣というテーマから離れ, 第 2 章〜第 4 章までで学んだアフィン幾何学を出発点として, 射影幾何学について考えていきます. 射影平面がユークリッド平面と大きく違うのは, 「任意の 2 直線がただ 1 点で交わる」ところです. この違いが, 射影平面に特有の様々な性質をもたらしてくれます. 第 5 章以降では, この興味深い射影平面について学んでいきましょう. 第 8 章では, 射影幾何やアフィン幾何の様々な応用例が載っています. ここでは, 実験計画法やゲームの対戦相手の

組み合わせ方など, 組み合わせ論と結びつく興味深いテーマが扱われています. セミナー当日は, 進度に応じて, その中からいくつか選んで読みたいと思います.

本書は, 副題に「魔方陣から現代数学へ」とある通り, 魔方陣という比較的親しみやすい題材を通して, アフィン平面や射影平面などの, 応用範囲の広い幾何学について学ぶことのできる本です. 説明は一つ一つ丁寧で, 誰でも知っている当たり前のことを出発点として, 様々な定理を証明しながら進めてくれます. 予備知識は中学校程度の数学を理解していれば十分です.

(文責：井上 卓哉)

2　群論への 30 講 - 志賀浩二

■難易度の目安 ☆

群とは, 簡単にいえばある種の変換の集まりを定式化した代数的な構造です. まずいくつか群の例を挙げてみます.

- 正多面体があるとき, それを回転して元の形に戻るような変換の集合が合成に関してなす群 (正多面体群)
- 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への全単射全体の集合が合成に関してなす群 (n 次対称群)
- 整数全体が加法に関してなす群
- 自然数 n に対して, n と互いに素な n 以下の自然数が乗法に関してなす群

正確には, 群とは二項演算 (積や合成) が定義され, 結合法則が成り立ち, 単位元 (恒等変換) が含まれ, 任意の元に対しその逆元 (逆変換) が存在するような集合のことをいいます. 3 番目の例であれば, 通常の足し算が二項演算であり, $(a+b)+c = a+(b+c)$ が結合法則を, $a+0 = 0+a = a$ が単位元の存在を, $a+(-a) = 0$ が逆元の存在を意味する式となります.

上のような一見異なった対象が同じ枠組みで捉えられることからもわかるように群という構造は非常に汎用性が高く, 近現代の数学にも頻繁に登場します. また, 4 番目の例は数学オリンピックでもよく知られているフェルマーの小定理やオイラーの定理などとの関係が深く, 群論が初等整数論にも応用できたり, 見通しの良い視点を与えてくれたりすることを示しています.

本書は各講 8 ページほどからなる 30 の講で構成されています. はじめは正多面体群や対称群のような変換の色彩の強い例で群を導入し, 次第に抽象的な群論にも馴染めるように書かれています. 中盤までで群論の一般論における最重要事項を学び, 後半ではいくつかのより進んだ内容 (基本群, 位相群, 表現など) を垣間見ることができます.

この本を読むにあたっては, 予備知識はほとんど必要ありません. 後半には行列や位相の基礎を仮定している講も一部ありますが, チューターが必要に応じて飛ばしたり知識の補充をしたりするので問題ないと思われます. 数学書としてもあまり形式張らない形で書かれているので, 数学書をほとんど読んだことがないが高校の先の数学に触れてみたい, という人には特におすすめです.

(文責：井上 卓哉)

3　石取りゲームの数学, ゲームと代数の不思議な関係 - 佐藤文広

■難易度の目安 ☆

この本では,

- 偶然性に依存しない
- 互いの持ち手が隠されたりせず, 情報が完全に公開されている

という性質をもつゲーム (**組み合わせゲーム**と呼ばれます) のなかでも,

- どちらか一方のみが勝つ
- 2 人のプレイヤーに同一の指し手が許されている
- 有限回の指し手で必ずゲームが終了する

という条件をもつようなゲーム (**不偏ゲーム**と呼ばれます）を扱います. このようなゲームは先手必勝または後手必勝に分類することができ, その背景には様々な美しい代数的性質があることが知られています. 代表的な例としてニムがあげられます. ニムとは, 最初いくつかの石の山 (石をいくつか集めたもの) があり, 二人のプレイヤーが, 1 つの山を選んでそこから石を好きな個数だけ取り除くということを交互に繰り返し, 最後の石をとった方が勝ちというゲームです. このような単純なゲームの必勝法の背景には, ゲームの状態を表す Grundy 数や複数のゲームを足し合わせる演算であるニム和など, 美しい数学があります.

この本の構成としては, はじめの 3 章でニムを用いてニム和や Grundy 数の導入をした後, 4 章以降ではニムに類似したゲームなどをふまえながら, これらの組み合わせゲームの性質を扱う理論である組み合わせゲーム理論について, いくつかの話題を扱います. また, 12 章では最後に石をとった方が負けとなるような, 逆形と呼ばれているゲームを通じて組み合わせゲーム理論の踏み込んだ話題にもふれています. この本の後半では, 各章が独立した内容を扱っているため, 参加者の好みに応じて読む範囲を決めていくことになると思います. 予備知識は特に必要ありません.

（文責：窪田 壮児）

4　An Introduction to Chaotic Dynamical Systems - Robert Devaney

■難易度の目安 ☆☆

本書のタイトルを和訳すると「カオス力学系入門」となります.

力学系とは一定の規則に従って時間の経過とともに状態が変化していく様子のことです. 例えばビリヤードで球を突くと, 球は力学の法則に従って運動し, t 秒後の球の位置や運動が数学的に記述できます. このように状態が連続的に変化していく力学系のことを連続力学系と言います. 一方で数列の漸化式や関数の反復合成のように, 状態がとびとびに変化していくものは離散力学系と呼ばれ, 本書では後者の離散力学系, 特に関数の反復合成についての力学系を扱います.

力学系のうちその状態の変化が「ランダム」のように見える振る舞いをするものはカオス力学系と呼ばれます．カオスの定義として最も本質的なものは**初期値鋭敏性**です．先ほどのビリヤードの例において, 球を突く方向をほんの僅かに変えただけでも十分に時間がたつと球の運動は全く異なるものになります．このようにどれだけ小さな初期値の変化でも十分先での状態に大きな影響を与えるような性質を初期値鋭敏性と言います．この性質によって, 力学系の十分先の状態は近似的にでも予測できないものとなり, この意味で「ランダム」となります．

本書の前半では離散力学系の最も単純な例である実数から実数への関数の反復合成によって得られる力学系 (1 次元離散力学系と言います) の性質を調べていきます．その例の 1 つとして, 次の式で表される単純でありながらも力学系における様々な性質が表れる**ロジスティック写像**を調べます．

$$f(x) = \mu x(1-x)$$

例えば $\mu = 2$ では 0 から 1 までのどんな実数に反復合成しても $\dfrac{1}{2}$ に収束するという単純な力学系が現れますが, $\mu = 5$ ではほとんど全ての実数において $-\infty$ に発散するにも関わらず, 任意の n について n 回合成によって始めてもとに戻るような点 (素周期 n の点と言います) が存在します．

また 1 次元離散力学系において重要な結果であるシャルコフスキーの定理を示します．この定理は実数から実数への連続関数が素周期 3 の点を持つなら任意の n について素周期 n の点を持つことを主張する, とても簡潔で驚くべき結果です．セミナーではロジスティック写像の性質とシャルコフスキーの定理の証明を主に扱うことになるでしょう．

予備知識としては, 高校で習う程度の微分が分かっていれば十分です．一部で位相空間論を用いますが, とても簡単なものなので適宜チューターが解説します．

（文責：神田 秀峰）

5　ガロア理論講義 - 足立恒雄

■難易度の目安 ☆☆

これを読んでいる皆さんなら, 中学校で習う 2 次方程式の解の公式はよく知っていることでしょう．そして, 中には 3 次方程式の解の公式を知っている方もいることでしょう．では 4 次方程式の解の公式はどうか？何次方程式の解の公式まで存在するのだろうか？答えを先に言ってしまえば, 4 次方程式の解の公式までが存在していて, 5 次以上の方程式の解は方程式の係数の四則演算と冪根では一般に表せないことが知られています．このような結論を与えたのが, 本書で扱うガロア理論です．ガロア理論を学ぶにあたっては, 群や体といった代数系と, それらの間の代数的構造を保つような写像を扱っていくことになります．具体的な例を挙げると, 体に対してそれを含むより大きな体を与える, 体の拡大と呼ばれる操作があります．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ に対し, $\sqrt{2}$ を加え, さらに加減乗除について閉じているようにした体 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ を作る操作が体の拡大の一例です．耳慣れない単語がたくさん登場してきて怯んだ人もいるでしょうが, 本書では初学者にもイメージしやすいようにというコンセプトで丁寧な説明がなされているので, 高校範囲の知識でも十分読めます．例えば, 本書の冒頭第 1 章では, いきなり代数系の抽象的な話に入るのではなく, 「ギリシャの 3 大作図不能問題」(ある円が与えられて, それと同面積の正方形はコンパスと定規で書けない, などなど)

から問題を提起して, 体の拡大や拡大次数についての導入がなされています. それが第 2, 3, 4 章での厳密ですが抽象的な議論を理解する上で大きな助けになっています.

第 5 章においては, それまで積み上げてきた前準備を用いて, $\mathbb{Q}$ の有限次ガロア拡大の中間体が, そのガロア群の部分群と一対一に対応するという, ガロア理論の基本定理を証明します. 本セミナーでは, 第 6 章にある 5 次方程式の解の公式の非存在性の証明を最終目標として進めていく予定ですが, もし進度に余裕があれば, 定規とコンパスで作図可能な正 n 角形を決定するなど, ガロア理論を応用したさまざまな命題を「おまけ」として扱う可能性もあります. 最後の章まで読み終えるのは難しいと思いますが, 持ち帰ってから読んで楽しんでもらえるとよいと思います.

また, この本のもう一つの特徴として, ガロア理論の歴史背景に触れているという点が挙げられます. ガロア理論の創始者はもちろんガロアなのですが, 当時は代数学の言葉はなく, 理論も今ほど洗練されていたわけではありません. どのような歴史をたどって現在の形になったのかという背景を知ることができるのも, この本の面白いところでしょう.

(文責：高谷 悠太)

6　ルベーグ積分 30 講 - 志賀浩二

■難易度の目安 ☆☆

図形 (平面上の点の集合) が与えられたとき, その大きさを調べる指標の 1 つになるのが「面積」です. 初等幾何で登場する図形については, 「円の面積＝半径×半径×円周率」のように定めてきましたが, 一般の図形に対しては, 図形ごとの特別な性質によらない面積の定め方を考えなければなりません.

高校で習う積分 (リーマン積分といいます) はその解決法の 1 つとなっていて, 連続関数のグラフに囲まれた図形の面積を定めることができます. しかし, リーマン積分は「図形を軸に垂直な無数の直線で分割する」という発想で計算するため, 限られた図形の面積しか求めることができません. 例えば,

$$\{(x, y) \mid x \text{ と } y \text{ は 0 以上 1 以下の有理数 }\}$$

という点集合を考えると, 面積を定める困難さが感じられると思います.

ものの量を測る最も単純な方法は, 「1 つ, 2 つ, ……」と数えることなのですが, 図形上に点は無限に存在するため, この方法は使えません (例えば, 1 辺 1 の正方形上の点と 1 辺 2 の正方形上の点が 1 対 1 対応してしまいます). ここで, 面積とはどのようなものだったかに立ち返ってみましょう. 「1 辺 1 の正方形の面積は 1」や, 「2 つの図形の重ならない和集合の面積はもとの面積の和となる」や, 「図形を平行移動したときに面積は変わらない」といった性質を持っていることが期待され, 実際, そのような性質が成り立つように, 長方形, 三角形の面積を順に定めていったわけです. これを上手に一般化すると「ルベーグ測度」という概念に到着し, 上で挙げた例をも含む様々な図形の面積を定めることが可能になります.

また, このルベーグ測度を用いてリーマン積分の拡張となっているルベーグ積分を定義することができます. ルベーグ積分の 1 つの大きな成果は, 関数列の積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

が出来るためのかなり簡単な条件を与えたことです．こういった操作の正当化は大学以降の数学や物理で頻繁に必要になり, ルベーグ積分は現代の解析学の基礎となっています.

ルベーグ測度・ルベーグ積分の導入には無限概念と数学的にきちんと向き合うことが必要になり, 形式的でとっつきにくい入門書が多いですが, その中でも本書は例や直観的な説明を多く入れて形式的な論理に終始することを避けており, 初学者にやさしいものになっています．ただし, やはりルベーグ積分は形式的な性格が強いため, 数学の証明を読み書きすることにはある程度慣れていることが望ましいです．また同時に, この本を選ぶ場合は (高校数学程度の) 極限の記号や操作には慣れていた方が良いでしょう.

(文責：早川 知志)

7　結晶群 - 河野俊丈

■難易度の目安 ☆☆☆

街で舗装された道を見ていると 2 方向に周期的な (実際は有限なので周期的でないですが) タイル張りがされていることがよくあります．当然色や素材などを考えると同じタイル張りはほとんどありませんが, その対称性だけを考えると意外とパターンが少ないことに気づくと思います．経済的な制約や何らかの利便性の関係で少ないのかもしれません．そのようなことを抜きにして考えるとどうでしょうか．それに答えるのがこの本の中心的な定理で, その主張は大雑把に述べると「2 方向に周期的なタイル張りの対称性はある基準で分類すると 17 種類である」というものです．ここで対称性は群という概念を用いて記述されます．この本で詳しく調べる対象である**平面結晶群**は, 2 方向に周期的なタイル張りの対称性として現れる群 (またはそれと平面への作用) のことで, 壁紙群や文様群とも呼ばれています．日本の伝統文様には 17 種類すべての対称性が現れることが知られており, 昔から私たちにとって大変馴染み深いものです.

平面結晶群が 17 種類に分類できることの証明はいくつか知られており, 代数的な議論からも示せる (余裕があれば触れるかもしれません) のですが, この本の証明で取っている方法はかなり幾何的です．具体的に何をするかというと, 平面結晶群からその軌道空間と呼ばれる空間を構成し, そのオイラー標数という量を考えることで式を作り可能性を絞っていきます．ここで軌道空間は**オービフォールド**と呼ばれる種類の空間になります．オービフォールドは多様体という空間概念の一般化で, それ自体が興味深い対象です.

この本を読む上で理論上は予備知識はほとんど不要なのですが, 出てくる概念の数が夏季セミナーで読まれる他の本 (の一部分) に比べて多いので, 夏季セミナーの期間内に平面結晶群の分類という目標までたどり着きたいのであれば, 次のうちいくつかはよく理解していることが望ましいです.

行列 演算および一次独立性などの用語．2×2 の場合がわかっていればよい.

群 剰余類や一般に軌道などの基本的な構成.

位相 距離やコンパクト性などの基本．ユークリッド空間の場合に運用できればよい.

これらに限らず必要な知識が足りないときはチューターが教えると思います．また, この本に限らないことですが, 分野によらずいわゆる数学書 (の一部分) をわからないところが無くなるまで読んだ経験があるとかなり助けになると思います.

(文責：青木 孔)

8 Introduction to Lie Algebras and Representation Theory - J.E. Humphreys

■難易度の目安 ☆☆☆

本書のテーマはリー代数と表現論です.

リー代数とはベクトル空間であってリー括弧積という乗法構造を持ったもので, リー群と呼ばれる代数構造と幾何構造を兼ね備えたものに付随する概念です. リー群を図形として見たときにある点での接空間にはリー代数の構造が入り, こうして得られたリー代数はもとのリー群の局所的な構造を反映しています. 一方でリー代数はベクトル空間であることからも分かるように, 線型代数の手法を用いてその構造を調べることができるので, 付随するリー代数を調べることは元のリー群を直接調べることよりもずっと易しいです. 表現論とは, 抽象的な群を具体的な対称性として実現 (表現) したり, その実現の仕方が本質的にどのくらいあるか調べたり, それらの実現の仕方と群の間の関係について調べる分野であり, 現代数学や現代物理学の広い範囲で大きな役割を担っています. 本書では主に代数閉体 (複素数体だと思っても構いません) 上の半単純リー代数と呼ばれるクラスのリー代数について, その構造論と表現論を解説しています.

本の前半ではリー代数に関する基本的な性質を調べた後, 半単純リー代数をディンキン図形と呼ばれる有向グラフと対応させることで完全に分類することを目標としています. その過程で, 最も基本的な半単純リー代数である $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現の分類も説明されています. 本の後半では最高ウェイトと呼ばれる概念を用いて, 一般の半単純リー代数に対して, その有限次元表現の完全な分類が行われます. さらに既約表現の指標を計算する指標公式についても記述があります.

予備知識として基本的な群論や線型代数が仮定されています. 一方で, それを超えたより専門的な知識はあまり必要ありません. ただ技巧的で複雑な証明がよくなされるので, 数学書に読み慣れていることが望ましいでしょう.

（文責：神田 秀峰）

9 A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre

■難易度の目安 ☆☆☆

本書は 7 章からなり, 整数論の代数的な取扱いについても, また解析的な取扱いについても触れています. そのうち, 今回のセミナーでは「保型形式」をテーマとする第 7 章を扱う予定です.

本書で扱う保型形式とは, 大まかに言えば, 複素上半平面 $H = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ 上の関数 f であって, $ad - bc = 1$ なるすべての整数 a, b, c, d に対して

$$f(z) = (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

という関数方程式 (k は「重さ」とよばれる整数です) をみたすもの, として定義されます (実際には「保型形式」とはもっと一般的な対象です. 本書で扱われているのはそのうち最も簡単なタイプの保型形式に相当します).

保型形式は解析的な色合いの濃い対象ですが, 「素数の代数的な性質を集めて作られるある種の L 関数は, 保型形式から作られる」という予想 (Langlands 予想) があるなど, 代数と解析を結ぶ架け橋として数論的にも大変重要な対象と考えられています. Fermat 予想の解決などの近年の重要な結果もここで述べたことの研究によるもので, 保型形式は現代整数論のまさに中心的なテーマの 1 つとも言えます.

本書では, 上述のように, 最も簡単なタイプの保型形式を論じており, 重さ k のものをすべて求めたり, それから作られる L 関数の様子を調べるということが主な内容です. 基本的な複素解析以外をほとんど用いずに保型形式の初歩を論じており, 本書のこの章は, 保型形式の入門的な解説書として高く評価されています.

内容の紹介は以上です. 次に本書を読む上での予備知識について説明します. 複素解析の基礎, 具体的には

- 複素数 z に対する指数関数 e^z
- 「正則関数」「有理型関数」「極」などの言葉の意味や簡単な性質
- 基本的な無限和の扱い

などが必要となります.

これらの予備知識についてはセミナー初日に担当チューターが簡単に説明しますが, 1 からすべて証明するということはせず必要な定義や結果を整理する程度になります. そのため, 本書に興味のある方は事前にある程度複素解析について勉強しておいた方が良いと思います.

「どうやって勉強すればいいのかわからない」という方は, 少し大きめの本屋や図書館などで「複素解析」「複素関数論」などという言葉がタイトルに入っている本を探して, そのうち一番読みやすそうな本を読み進めてみてください. 所々消化できない部分があっても, 雰囲気を掴んでおけば大丈夫でしょう.

(文責：黒田 直樹)