2018年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の8冊です.

1. コンパスと定規の幾何学 - 瀬山士郎
2. 平方剰余の相互法則 - 倉田令二朗
3. 組み合わせゲーム理論入門 - Michael H.Albert, Richard J.Nowakowski, David Wolfe
4. 計算で身につくトポロジー - 阿原一志
5. Rational Points on Elliptic Curves - Joseph H. Silverman
6. 無理数と超越数 - 塩川宇賢
7. 射影平面の幾何学 - 川又雄二郎
8. Introduction to Analytic Number Theory - Tom M. Apostol

洋書を読むにあたって

5, 8は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから1冊ずつ内容を紹介していきます.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

- ☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.
- ☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.
- ☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). そもそも, 様々な尺度が存在する本の難易度というものを厳密に三段階に分けることが無理を含んでいるのです. 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1　コンパスと定規の幾何学 - 瀬山士郎

■難易度の目安 ☆

初等幾何学における作図とは,「2 直線の交点を求める」,「直線と円の交点を求める」,「2 円の交点を求める」ということを積み重ねて, 求める図を描くということです.

この本は 7 章からなり, 2 章まででは基本的な作図の方法を通して, 解析, 作図, 証明, 吟味という一連の流れを学びます. 3 章では,「コンパスと定規で作図可能な図は, すべてコンパスのみで作図可能である」というマスケロニの定理を, 4 章では,「平面上に中心の分かっている円が与えられているとき, すべての作図が定規のみで可能である」というシュタイナーの定理をそれぞれ示します. また, 5 章では作図と代数を結びつけ, それを用いて 6, 7 章では三大作図問題の作図不能性や正 17 角形の作図の証明を行います.

この本を読むにあたって, 予備知識は特に仮定しません. 数学書を読み慣れていない人でも, 手を動かしながら楽しく読み進めていけると思います. この本の選択を考えている人は, コンパスと定規を持参するとよいでしょう.

2　平方剰余の相互法則-ガウスの全証明 - 倉田令二朗

■難易度の目安 ☆

奇素数 p とそれと互いに素な整数 a について, $x^2 \equiv a \pmod p$ をみたす整数 x が存在するとき a は p を法として平方剰余であるといい, 存在しないとき a は p を法として平方非剰余であるといいます.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき}) \\ -1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方非剰余のとき}) \end{cases}$$

と定めます (これをルジャンドル記号といいます). このとき, 平方剰余に関して次の 3 つの定理が成り立ちます.

(1) $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

(2) $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

(3) $\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ 　(p, q は相異なる奇素数)

この 3 つの定理は上から順に, 「平方剰余の第一補充則」「平方剰余の第二補充則」「平方剰余の相互法則」とよばれ, その中でも「平方剰余の相互法則」は強力な定理です. これらの 3 種類の法則に加えて,

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

という性質を用いることで, $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ を機械的に計算することができます.

ガウスは「平方剰余の相互法則」を最初に証明し, その後, 7 種類の独立した証明を与えていて, 本書にはこの定理の 7 種類の証明がすべて載っています. 同じ定理の証明を 7 種類も把握するのは一見無意味に見えるかもしれませんが, これらを通じて, 二次形式, 円分多項式など, 様々な整数論のトピックを学べるうえ, 第 6 の証明は立方剰余や 4 乗剰余にも拡張できる証明であるので, 平方剰余の相互法則をより高い視点で見られると思います. ガウス自身も, 立方剰余, 4 乗剰余につながる証明を模索するために, 様々な手法で平方剰余の相互法則を証明したそうです. この 7 種類の証明を知ることによって, ガウスの数学思想も知ることができます.

本書の第 0 章に初等整数論の基本事項が載っていますが, 整数の扱いにはある程度慣れていることが望ましいでしょう (難易度が☆一つの本の中では難しい方だと思います). また, 整数以外では, 群・環・体の定義や, 二次の行列の計算 (第 2 の証明で使います) について知っていることが望ましいです. 興味のある方は事前に整数論の基本の部分 (フェルマーの小定理, $\mathrm{mod}\, p$ における逆元の存在, 平方剰余の第一, 第二補充則あたり) を勉強することをお勧めします.

3　組合せゲーム理論入門 - M. H. Albert(著), R. J. Nowakowski(著), D. Wolfe(著), 川辺治之 (訳)

■難易度の目安 ☆

この本は, ゲーム理論というタイトルですが, 相手との協力や駆け引きなどを扱うゲーム理論 (ナッシュ均衡点などを扱うもの) ではなく, 組合せゲーム (完全情報 2 人ゲーム) について扱っています. この組合せゲームというのは, 「二人の対局者が交互に手を打ち, サイコロや切り混ぜたカードといった偶然に左右される道具は使わず, 対局者の手番がきたときにそのゲームの現在の状況が完全に開示されている (手札が見えている) もの」です. 有限手数でゲームが終了しどちらかのプレイヤーが勝つという条件も加えると, 組合せゲームは先手必勝または後手必勝となります. 組合せゲーム理論では, 先手と後手のどちらのプレイヤーに必勝法があるかなどについて考えていきます. 代表的な組合せゲームとしてニムが挙げられます. ニムとは, 最初いくつかの石の山 (石をいくつか集めたもの) が

あり, 二人のプレイヤーが, 一つの山を選んでそこから石を好きな個数だけ取り除くということを交互に繰り返し, 最後の石をとった方が勝ちというゲームです. このように単純なゲームでありながら, Grundy 数などの美しい数学と関連しています.

ニムについて扱っている本は多くありますが, この本では他にもいろいろな多くのゲームが扱われています. また, 300 ページほどある本なので, 前半は組合せゲームになじめるように簡単な話からはじまっていて, 後半は組合せゲーム理論のかなり踏み込んだ話題まで扱っています. 具体的には, 温度測定法, 原子量などの発展した話題を扱っていて, 組合せゲームについて多少学んだことがある人にとっても目新しい内容がたくさんあると思います. 必ずしも最初から読む必要もないので, 参加者のレベルに合わせてどこを読むか決めていくことになると思います. 予備知識は特に必要ありません. ゲームというなじみやすい題材なので, はじめて数学の本を読む人でも読みやすいのではないかと思います.

4　計算で身につくトポロジー - 阿原一志

■難易度の目安 ☆☆

この本のタイトルにあるトポロジーとは幾何学の分野の 1 つです. 幾何学においては様々な図形を何かしらの基準の下で調べるということが多くなります. 図形をゴムのように伸ばしたり縮めたりしても変わらないような性質を図形から取り出す, というのがトポロジーの基本的な考え方です. 有名な例としてドーナツ (の表面) とコーヒーカップ (の表面) が挙げられます. これらは一方を曲げたり伸ばしたりして変形することで, もう一方へと形を変えることができますが, この変形において「穴が 1 つ」という性質は保たれています. このように, 図形を連続的に変形させても変わらない性質のことを位相不変量といいます. 2 つの図形の位相不変量が異なれば, それらは連続的な変形で移り合うことはないといえます. 例えばドーナツは穴が 1 つあり, 球は穴がないことから, ドーナツを連続的に変形することで球にすることはできないということを示すことができます.

この本は, このような位相不変量であるホモロジー群の入門書です. 色々な図形のホモロジー群を自分の手で計算し, 基礎的な定理を証明していくことで理論の面白さを体感できるように書かれています.

この本は 15 章からなり, 1, 2 章では写像や群に関する基礎的な知識がまとめられています. 3 章から 8 章では有向グラフの上でホモロジー群を定義し, 豊富な具体例に触れつつその性質を調べていきます. また 9 章では完全系列というものを用いて, それまでに述べたホモロジー群の性質のいくつかを鮮やかに示していきます. そして 10 章以降では曲面のホモロジー群について述べ, それを応用して閉曲面の分類定理を取り扱います.

セミナーでは主に 9 章までの内容を扱い, 余裕があれば 10 章以降の内容にも進んでいきたいと思います. この本を読むにあたっては, 予備知識はほとんど必要ありません. 一部行列を用いているところもありますが, 必要に応じてチューターが補足するので問題ありません.

5 Rational Points on Elliptic Curves - J. H. Silverman, J. Tate

■難易度の目安 ☆☆

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の形の方程式が与えられたとき, この方程式をみたす点 (x, y) 全体のなす曲線を楕円曲線と呼びます. このような曲線が与えられたとき, この曲線に有理点 (x 座標も y 座標も有理数である点) や整点 (x 座標も y 座標も整数である点) がはたして存在するか, また存在するなら無限個か有限個か, という興味ある問題が発生します. 一般にこのような問題に答えることは簡単ではありません. たとえば, $y^2 = x^3 - 5x$ 上には無限個の有理点がありますが, $y^2 = x^3 - x$ 上には $(0, 0), (\pm 1, 0)$ の 3 個しかありません.

楕円曲線特有の性質として, 曲線上にある 2 点を「足し合わせて」新たな点を得る操作 (加法) が存在し, さらにこの操作による有理点と有理点の「和」はまた有理点になるというものがあります. たとえば, $y^2 = x^3 - 2$ 上の有理点として $(3, 5)$ はすぐに見つかりますが, この点を「2 倍」する ($(3, 5)$ と $(3, 5)$ を足す) と $(\frac{129}{10^2}, -\frac{383}{10^3})$, さらにこれを「2 倍」すると $(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3})$ になり, 簡単には見つからない有理点が次々と計算できます. この点と点の「和」から, さまざまな楕円曲線の深い性質が導かれます.

本書の前半部分では, 楕円曲線およびその上の「加法」の定義をし, 与えられた楕円曲線のすべての有理点はある有限個の点を「足し合わせる」ことで得られる (群論の用語を用いれば, 「有理点のなす群は有限生成である」) という Mordell の定理など, 興味深い定理を証明していきます. セミナーではこの部分を読み進めることになるでしょう. 丁寧に説明されていますので, はじめて楕円曲線に触れる人でも問題なく読み進められると思います.

代数・数論・幾何と様々な分野が融合しますが, 高等な予備知識は特に必要ありません. 高校レベルの座標幾何と多項式の微分を知っていれば十分でしょう. 「(可換) 群」について多少知っているとよいですが, 必須ではありません.

6 無理数と超越数 - 塩川宇賢

■難易度の目安 ☆☆

中学校で習うように, すべての実数は「有理数」「無理数」の 2 種に分類されます. これは, ある数が整数の比で表せるかという基準による分類で, 無理数は, 整数の比で表せる有理数に比べれば代数的に複雑な数だということができます.

数の代数的な複雑さによる分類には, 「有理数」「無理数」の他にも「代数的数」「超越数」というものがあります. 具体的にはある整数係数の方程式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

の解となる数を代数的数と, ならない数を超越数といいます. 超越数は, 無理数の中でも特に複雑な数ということになります. ここで, ある数が有理数であることはそれが 1 次の整数係数の方程式の解になることと同値であるという見方もできますね.

高校までに習う数の中にも無理数・超越数はたくさんあります．たとえば

$$\pi, \quad e, \quad \log_2 3, \quad 2^{\sqrt{2}}, \quad \cos 1$$

などはすべて超越数ですし,

$$\sqrt{2}, \quad \cos 1^\circ$$

などは超越数ではありませんが, 無理数です．また, 集合論的にも「ほとんどすべての実数が無理数・超越数である」ということが知られており, 無理数・超越数は実はそこら中に溢れています．

しかし, 皆さんが無理性を証明できる数は, 実はかなり少ないのではないでしょうか? たとえば e や π が無理数だという事実は聞いたことがあっても, 証明の方法は全く想像がつかないという人も多いでしょう．超越性の証明ともなると, なおさらのことだと思います．そういった様々な数の無理性・超越性の証明が, 本書では幅広く紹介されています．1 つ 1 つの証明も独特で面白いですし, テーマもわかりやすいので, 中高生の皆さんでも興味をもって楽しく学べると思います．

また, 無理数・超越数論の結果のいくつかは, 方程式の整数解を調べる問題などにも応用されています．たとえば本書の 3 章で扱われている Roth の定理を用いて, 定数 k に対して $x^3 - 2y^3 = k$ の整数解 (x, y) が有限個しかないことを示すことができます．このような, 無理性・超越性の判定という問題意識からは意外な応用があるのも無理数・超越数論の面白さの 1 つだと思います．

本書は最初からきちんと読み進めていかなくても, 読みたいトピックを選んで読める本なので, セミナーでは e や π など高校生でもよく知っているであろう数の無理性・超越性の証明を優先的に読んでいきたいと思います．1 つ 1 つの証明がやや長めのものが多いので, 数学書に親しみがないと苦労も多いと思いますが, 諦めず丁寧にコツコツ読み進めていきましょう．

本書を読むにあたっての予備知識ですが, 少なくとも高校範囲の微積分を十分に理解していることを仮定します．他に一部の定理の証明には複素関数論・線形代数の初歩を使うのでこれらの知識があると理想的ですが, 知らなくても適宜チューターが説明します．

(文責：早川 知志)

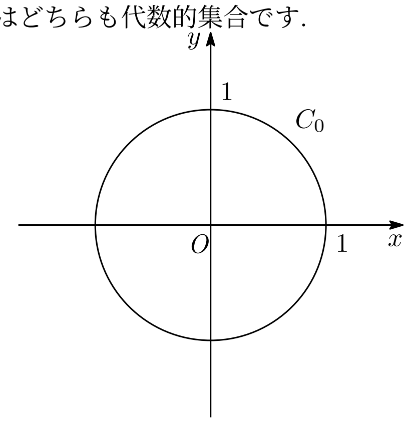
7　射影幾何空間の幾何学 - 川又雄二郎

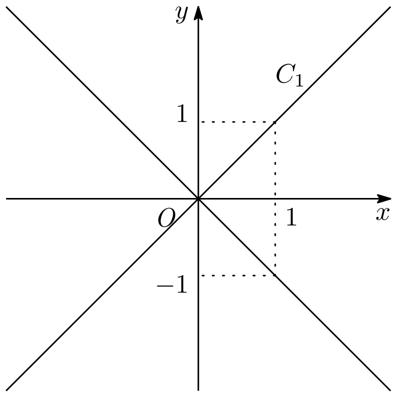
■難易度の目安 ☆☆☆

座標平面 $\mathbb{R}^2$ や座標空間 $\mathbb{R}^3$ のように, 体 (四則演算が自由に行える集合)K と正の整数 n を用いて $K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$ で表される集合を**アフィン空間**といいます．この本の主役である**射影空間**はアフィン空間に無限遠点と呼ばれる点を加えた集合です．実際の定義とは異なりますが, 直感的には平面上の相異なる 2 直線がつねに 1 点で交わるように点を加えます．射影空間はアフィン空間に比べて一見分かりにくいですが, アフィン空間にはない都合のよい性質を持っています．平面上の相異なる 2 直線がつねに 1 点で交わることもその性質の 1 つです．

今回のセミナーでは主に 2 章と 3 章を扱う予定です．2 章では射影空間の定義をした後, 線形代数の諸性質を射影空間に適用します．それを用いるとデザルグの定理, パスカルの定理のような射影幾何学の有名な定理が簡潔に示されます．

3 章ではアフィン空間または射影空間内の, いくつかの多項式で定義される図形 (**代数的集合**といいます) について扱います. たとえば, $C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\}$ はどちらも代数的集合です.





右上の図を眺めてみると C_1 は 2 直線 $y = \pm x$ の和集合であることが分かります. このように代数的集合は, 空でない真に小さい 2 つの代数的集合の和集合で表されるとき**可約**であるといい, そうでない場合は**既約**であるといいます (上の例では C_0 が既約で C_1 が可約となります). 既約な代数的集合を**代数多様体**といい, 射影空間内の代数多様体を **射影的代数多様体** といいます. この章の前半では射影的代数多様体の定義をし, 平面内の 3 次曲線 (1 つの 3 次多項式で定義される図形) の分類をします. 後半では重要な性質を持つ様々な射影的代数多様体を扱います.

予備知識として線形代数 (体上の線形空間, 線形写像, 表現行列, 線形商空間, 双対空間について) を仮定します. さらに環論や位相空間論の初歩を勉強すると読みやすくなると思います.

8 Introduction to Analytic Number Theory - Tom M.Apostol

■難易度の目安 ☆☆☆

整数論は, 代数学, 幾何学, 解析学などの様々な手法や問題意識が交錯する数学の分野です. 本書では, 解析学を通して整数論を深めていきます (解析学とは, 極限や関数の微積分を扱う分野です).

整数論で登場する多くの概念, たとえば約数, 素因数, 素数の個数や和といった情報は, 一般には非常に不規則な挙動を示します. しかしながら, 十分大きな区間においてこれらの平均的な振る舞いを調べるとその振る舞いはより「規則的な」関数で近似されることがわかります. たとえば x を十分大きな実数としたとき,

- x 以下の正の整数について, その正の約数の個数の平均は, 約 $\log x$ である.
- x 以下の正の整数のうち, 素数の占める割合は, 約 $1/\log x$ である.
- x 以下の無作為に選んだ 2 つの正の整数が互いに素である確率は, 約 $6/\pi^2$ である.

などの結果が知られています. このように現象を大局的な視点で近似的に捉えるのが, 解析的手法の特徴です. 整数論的関数の和を取り扱うテクニックや, 関数同士の関係を学びながら, これらの問題に取り組んでいきましょう.

素数の分布を解明するには, ゼータ関数とよばれる関数を調べることが重要になります. 代表例である Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

を考えてみましょう. 正の整数全体について簡単な関数を足し合わせており, このような関数の近似的な振る舞いは, 解析的に調べやすいといえます (ただし解析接続という手法で定義域を拡張すると非常に難解になり, Riemann 予想とよばれる未解決問題に繋がることを注意しておきます). この関数は, Euler 積とよばれる等式

$$\zeta(s) = \prod_{p\ \text{は素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

により, 素数と結びついています. したがって, この関数を調べることで,「素数の個数を数える」「素数全体について簡単な関数の和を考える」など, 素数の分布に関する問題に近づくことができるのです. その一例として本書では, Riemann のゼータ関数と, その変種を考えることで,

> Dirichlet の算術級数定理：任意の互いに素な正の整数 a, m に対し, $p \equiv a \pmod{m}$ をみたす素数 p が無限に多く存在する.

が (より精密な評価とともに) 示されており, セミナーにおける大きな目標の 1 つとなるでしょう.

予備知識としては, 初等整数論 (素数の性質や合同式) に関する基礎知識があること, 高校レベルの微積分や極限の考え方に慣れていることを仮定します. 整数論の発展的な話題に触れてみたい生徒を歓迎します.