2017年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO夏季セミナー実行委員会

セミナーで扱う本は以下の9冊です.

1. 組みひもの数理 - 河野俊丈
2. 整数の分割 - ジョージ・アンドリュース、キム・エリクソン (著) 佐藤文広 (訳)
3. 天書の証明 - M. アイグナー, G. M. ツィーグラー
4. 素数と2次体の整数論 - 青木昇
5. 解析力学と微分形式 - 深谷賢治
6. 複素関数入門 - 神保道夫
7. The Symmetric Group - Bruce E. Sagan
8. Complex Algebraic Curves - Frances Kirwan
9. A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre

洋書を読むにあたって

7, 8, 9は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりで全く分からないのではないかという印象を持つかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての専門用語は必ず定義が述べられるので, 知らない専門用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学生程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるといいでしょう.

洋書の選択を考えている人は (通常の) 英和辞典を持参することをお勧めします. 数学英和辞典を持っているという方は, あわせてそちらも持参するとよいでしょう. 数学英和辞典を持っていない方は, こちらで何冊か用意して貸し出しますので買う必要はありません.

次ページから1冊ずつ内容を紹介していきます.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.

☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.

☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). そもそも, 様々な尺度が存在する本の難易度というものを厳密に三段階に分けることが無理を含んでいるのです. 夏季セミナー初日には, 担当者による本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください.

1　組みひもの数理 - 河野俊丈

■難易度の目安 ☆

この本のテーマである組みひもとは, 図 1 のように n 本のひもがそれぞれ n 個の上端・下端に 1 本ずつつながれた図形のことです (図 1 では $n = 3$). このとき, 図 1a と図 1b のように, 端点を固定したままひもを動かすことによってうつりあうものは同じ組みひもと考えます.

この本のもう一つの主役は結び目・リンク (絡み目ともいう) です. 3 次元空間内で 1 本のひもを絡ませ, 両端をつなぎ合わせたものを結び目といい, いくつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものをリンクといいます. このひもは自由に伸び縮みするものとし, ひもを動かすことによってうつりあうものを同一視することにします. 結び目を平面に写しとった図 (射影図) を考えると, 同じ結び目同士の変形は平面上ではライデマイスター移動とよばれる 3 種類の基本移動の組み合わせによって表されます.

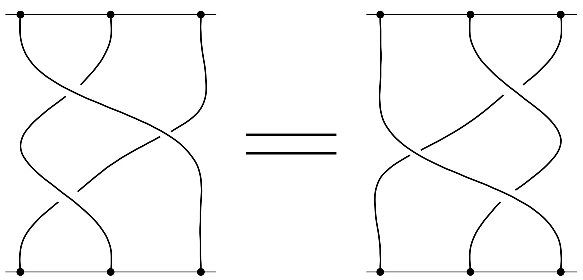

図 1a　　図 1b

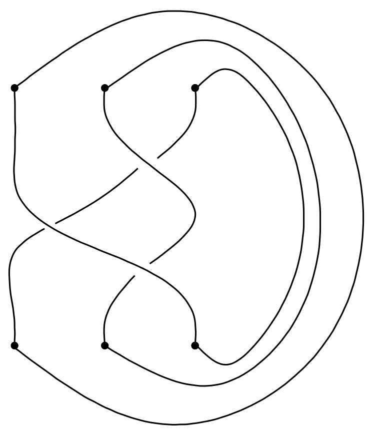

図 2

与えられた 2 つの結び目の射影図同士が同じ結び目であるか否かを判定せよ, というのは難しい問いですが, 結び目の射影図それぞれにある量 (多項式など) を対応させることを考えたとき, その量が

3 種類のライデマイスター移動によって変化しなければ, それは同じ結び目上では変化しないということを意味し, 結び目不変量とよばれます. そして (同じ結び目不変量をもつ結び目の射影図同士が同じ結び目とは限りませんが), 結び目不変量が異なる結び目の射影図同士は異なる結び目であることがわかるので, 結び目不変量を見つけることは結び目を分類するために大切なことです. この本では, リンクに向きを付けたり, 上で定義した組みひもとの対応を考えたりすることにより, 実際にいくつかの結び目不変量を構成します (図 2 は図 1b に対応するリンク).

ほかにも, 組みひもを用いたゲームや, 行列を用いた組みひもの表現など, 組みひもに関するトピックが多く扱われていることがこの本の特徴です.

この本を読むにあたって, 群の定義や行列の演算を知っていると少し読みやすいですが, 必要に応じてチューターがセミナー中に説明するので, 予備知識は特に仮定しません. また, この本では難しい証明はほとんど扱われておらず, 直観的に書かれている部分が多いので, 数学書に馴染みの薄い人でも読みやすいかと思います.

2 整数の分割 - ジョージ・アンドリュース、キム・エリクソン (著) 佐藤文広 (訳)

■難易度の目安 ☆

この本のテーマである「整数の分割」とは, 1 つの正整数をいくつかの正整数の和で表す方法のことです. 例えば, 4 は $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$ の 5 通りで表せます. これらが 4 の分割です.

このように, 整数の分割自体は単純な概念ですが, 実は面白い性質をたくさん持っています. 例えば簡単なものとして, Euler の恒等式「任意の正整数 n について, n の奇数のみによる分割と, 相異なる数のみによる分割の個数は等しい」などが挙げられます. このように, 「n の条件 A を満たす分割と条件 B を満たす分割の個数が等しい」という形をした主張を「分割恒等式」とよびます. この本ではまず, 「条件 A を満たす分割の集合」と「条件 B を満たす分割の集合」の間に一対一対応を作る全単射法や, Ferrer 図形と呼ばれる図形で整数の分割を表現し, その図形上の操作を考えることで等式を示す方法で, いくつもの分割恒等式が証明されます.

しかし, すべての分割恒等式がこのような初等的方法によって簡単に示されるわけではありません. そこで, 整数の分割をもっと分かりやすいものに置き換えることを考えます. 例えば, 6 以下の偶数と奇数とをそれぞれ 1 個ずつ含む分割をすべて求めたいと思ったとしましょう. それらの分割は, 次の多項式の積の中に自然に現れてきています.

$$
\begin{aligned}
&(q^2+q^4+q^6)(q+q^3+q^5) \\
&= q^{2+1}+q^{2+3}+q^{2+5}+q^{4+1}+q^{4+3}+q^{4+5}+q^{6+1}+q^{6+3}+q^{6+5} \\
&= q^3+2q^5+3q^7+2q^9+q^{11}
\end{aligned}
$$

これは非常に単純な例ですが, この考え方を拡張することで, 分割の情報を記憶させておく役目を果たすベキ級数である, 母関数というものが考えられます. これにより, 今まで組合せ論的対象だったものが, 級数の代数的操作に帰着することによって扱いやすくなります.

この本では, 母関数の手法と分割に関する考察を組み合わせることで, Gauss 多項式や Rogers-Ramanujan の恒等式など, 分割の理論の入門的な部分を学ぶことができます. さらに, 数学的な内容だけでなく, 過去の数学者たちによってどのような予想が立てられ, どのような試行錯誤が行われてきたのか, といった歴史的な部分にも触れることができるので, 味わい深い一冊となるでしょう.

この本を読むにあたって, 予備知識は特に仮定しません. 数学書を読み慣れていない人でも, パズルのように楽しく読み進めていけると思います.

3 天書の証明 - M. アイグナー, G. M. ツィーグラー

■難易度の目安 ☆

この本のタイトルにある「天書」は "The Book" を日本語に訳したものです. 一般的には, キリスト教の聖書を表わすことが多いようです. しかし, 生涯のすべてを数学に捧げた伝説の数学者ポール・エルデシュが "The Book" と言って指し示したのは, 神様が持つ, 数学の定理の完璧な証明が書き記された, そんな真実の書のことです.

エルデシュは, 数学の様々な分野の問題を驚異的なスピードで解決していき, 生涯で 1500 もの論文を発表しました. その原動力は「天書」の存在に対する固い信条だったのではないでしょうか. 特に, 素数定理に初等的な証明を与えたことや, 組合せ論において様々な新しいテクニックを生み出したことによる功績が凄まじく, あたかも「天書」からとってきたかのような美しい証明を次々と編み出しました.

この本の誕生は, 著者たちがエルデシュに, 「天書」のごくごく近似的なものを作ってみてはどうかと提案したことに端を発しています. 本の完成の前にエルデシュは亡くなりましたが, 彼のアイデアが色濃く反映された本に仕上がっています. 数論・幾何学・解析学・組合せ論の各分野から美しい定理とその証明がたくさん紹介されていて, その数は 90 個にも及びます.

内容の一部を紹介しましょう.「どんな正の整数 n に対しても, n より大きく $2n$ より小さい素数がある」という定理 (ベルトランの仮説) は, 聞いたことがある人もいるのではないでしょうか. この定理はもともと 1850 年に証明が与えられましたが, その後ラマヌジャンが簡単な証明に書き換え, エルデシュが 2 項係数 ${}_{2n}C_n$ を評価する別証明を与えました.「天書の証明」にはエルデシュのアイデアによる証明が載っています. このようにエルデシュ本人による定理や証明が紹介されているのも, この本の魅力の一つではないかと思います.

この本は, それこそ聖書 "The Book" と同じレベルで普及させてすべての人に読んで欲しい, そんな一冊なのですが, 今回のセミナーでは主に数学書を読み慣れていない人を対象にしたいと考えています. ただ, ある程度数学を勉強している人にとってもこの本は読む価値があると思うので (例えば, トポロジーの定理である不動点定理にグラフの彩色を使った組合せ論的な証明があると聞いたら驚く人は多いと思います), 読みたいという希望が強くある場合はこの本を選択してもよいでしょう.

短く章分けがされていて, どこからでも読める仕様になっており, 図も豊富なので, 総じて読みやすい本です. 前提知識が必要なトピックもいくつかありますが (具体的には, グラフ理論の用語や線型

代数の知識など), いずれもチューターが適宜解説するか, 解説のページが付いているので, それを参照することで間に合うのではないかと考えています.

4　素数と 2 次体の整数論 - 青木昇

■難易度の目安 ☆☆

「n を 3 以上の整数とするとき, $x^n + y^n = z^n$ をみたす正の整数の組 (x, y, z) は存在しない.」

これは, フェルマーの最終定理という有名な定理です. 一般に, 方程式の整数解を考えるとき, 素因数を調べるのは有効なテクニックの 1 つですが, これを用いる際には式をできるだけ因数分解した形にしておくと考えやすいです. そこで複素数の範囲で考えると, 例えば $n = 3$ の場合なら上の式は $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を用いて

$$(x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = z^3$$

と因数分解できます. このとき方程式の係数は, もともと有理数の範囲に収まっていたのが因数分解により $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b$ は有理数 $\}$ (これは 2 次体とよばれるものの 1 つです) の範囲まで広がりますが, それに対応して, 整数の世界を拡張した「2 次体の整数」(一般には「代数的整数」) の世界で素因数を調べるという方法をとります. 具体的には, 上の例なら $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b$ は整数 $\}$ 上で考えます.

2 次体の整数の世界でも, 普通の整数と同様に加減乗の演算, 割り切る・割り切れるの関係, 素数の概念などが定義できますが, 普通の整数の世界なら成り立つ「素因数分解の一意性」が一般には成り立たなくなってしまいます (これがフェルマーの最終定理の難しいところの 1 つにもなっています). そこで登場するのがイデアルの概念です. イデアルとは, 数の代わりにその数の倍数全体を考えるという考え方で数の概念を拡張したものです. イデアルの世界で素数に対応するのが素イデアルで, イデアルの世界では素イデアル分解の一意性が成り立ちます. イデアルを考えることにより 2 次体の整数, 特に素因数分解に関して詳しく調べることができるようになります.

本書では, 2 次体の整数の導入や, どのような場合に素因数分解の一意性が成り立つかについて述べられた後, 応用としてフェルマーの最終定理の $n = 3, 4$ の場合や, 「任意の 4 で割って 1 余る素数は 2 個の平方数の和で表せる」というフェルマーの 2 平方和定理が示されており, セミナーの大きな目標となるでしょう. 余裕があれば素イデアル分解の一意性のところまで進めるとさらに代数的整数論の面白さが分かると思います.

2 次体の整数論を勉強するのに必要な初等整数論も前半で詳しく解説されており, 少し用いられている群や環の知識も付録にまとめられているので, 予備知識は不要です. 整数論に興味のある皆さんをお待ちしております.

5　解析力学と微分形式 - 深谷賢治

■難易度の目安 ☆☆

ニュートンの運動方程式は, しばしば座標のとり方を変えることで解くことができます. ところが, ニュートンの運動方程式は座標変換で形が変わってしまいますし, 実際に計算するのが面倒なことがあります. その問題点を克服しようとしてできたのが解析力学であり, 運動方程式はハミルトン方程式として再定式化されます. 解析力学は, 運動方程式を解いたり, 数値計算等で調べたりする上で応用されるのみならず, 量子力学や統計力学など, より進んだ物理の分野の基礎にもなっています.

第 1 章では, 運動方程式がハミルトン方程式, オイラー・ラグランジュの方程式で与えられること, これらが互いに関係していることをみます. ハミルトン方程式は, ハミルトニアンという関数を決めると定まる方程式であり, 物理的にはハミルトニアンはエネルギーを表します. 一方で, オイラー・ラグランジュの方程式は, ある「関数の関数」 (こういうのを汎関数といいます) の極値をとるという条件を表した方程式です. ここで, 極値をとるという性質は座標の取り方によりませんので, オイラー・ラグランジュの方程式も座標変換に対する不変性があります. 第 2 章でベクトル場の座標変換を扱うと, そのことが理解できるようになります. ハミルトン方程式は, (位置と運動量の変数を混ぜた) より広い種類の変換に対する不変性があり (そのような変換を正準変換という), それをきちんと論じることがその後の目標になります. 第 2 章で微分形式を学び, 第 3 章ではシンプレクティック形式という微分形式を保つ変換こそが正準変換であると分かります. セミナーでは, ここまでは読み進めたいと思っています. 第 3 章の残りでは, ハミルトニアンの対称性と保存量が対応するというネーターの定理などを扱っています.

解析力学という物理のテーマを扱った本ではありますが, ベクトル場・微分形式などの (多様体論において) 重要な事項を広く分かりやすく解説しているのも, 魅力的な点です. より進んだ数学・物理の教科書を読み進める中で, 本書で学んだことが生きる場面は多いと思われます. 予備知識として, 高校範囲の微積分 (三角関数や指数関数の微積分, 部分積分など) を仮定します. 知っておいた方がよい事項として, 偏微分, 行列 (積の計算や一次変換) が挙げられます.

6　複素関数入門 - 神保道夫

■難易度の目安 ☆☆

この本は「複素解析」という分野の入門書です. 高校で学ぶ微積分は, 実数に対して定義され実数値をとる関数（実関数）を扱いますが, その定義される値およびとる値を複素数に拡張したものを複素関数と言います. その複素関数の微積分を考えるのが複素解析という分野です.

実関数 $f(x)$ が微分可能であるとは, 定義域に含まれるすべての x について極限 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ があることでした. また, この極限 $f'(x)$ を x の関数とみなして $f(x)$ の導関数というのでした. $f(z)$ が複素関数の場合でも, 実関数の場合と同様に微分可能性や導関数が定義されます. ただし, 複素関数の場合は $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ という極限において h を 0 に近づける方法が, 実関数の場合より多いため (という言い方はあんまり正確でないかもしれませんが, 複素数は複素平面で表されるように 2 次元的に広がっていることが関係して), 複素関数に対する微分可能という条件は実関数の場合よりもかなり強くなります. 微分可能な複素関数は正則関数とよばれ, 様々な強い結果が成り立ちます. 例えば正則関数は 1 度だけでなく, 何度でも微分できることがいえますし, ある点の近傍での値が分かるだけで他の部分での値も決まってしまいます.

複素関数については, 複素平面上の曲線に沿った積分を考えることができます. これは実関数の定積分の拡張になっています. 特に, 正則関数でこのような積分を考えると様々なよい性質が成り立ちます. その応用として, 実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ や $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx$ $(a>0)$ を簡単に計算することができます. これらの関数の積分を考えるときには, 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ における点 $z=0$ のように定義できていない点 (特異点) の周りの情報 (特に留数とよばれる値) を調べることが鍵となります.

セミナーでは, 留数を使ってある種の積分が求まるという定理 (留数定理) を目標にしたいと思います. 余裕があれば, 発展的な話題として無限和や無限積による三角関数の表示についても読み進めることができるかもしれません. 予備知識としては, 高校で習う程度の複素数・微積分の知識を仮定します.

7 The Symmetric Group - Bruce E. Sagan

■難易度の目安 ☆☆

本書のテーマは「対称群の表現論」です. 群とは対称性を記述するための抽象的な数学的概念で, (n 次の) 対称群とよばれる群は (区別のつく n 個の) ものの順序を自由に入れ替えるということに対応します. また群の表現とは, ラフにいうと線形代数においてその群, 対称性が具体的にどう現れるかを考えたものです. (群やより一般の代数などの) 表現は, 数学の様々な場面に現れ応用されるだけでなく, 物理や化学でも用いられるなど現在では非常に重要な概念となっています.

表現論の目標はいくつかありますが, その一つが既約表現と呼ばれる表現をすべて決定することです. 既約表現とは, 表現を「分解」しきったものであり, 表現を理解するためには既約表現を知ることが重要なステップとなります. 対称群の表現論の目標の一つも対称群の既約表現を何らかの形ですべて得る, または具体的に実現しようというものです.

対称群の表現論には多くのアプローチが知られていますが, この本は 3 通りの方法を紹介しています. まず Chapter 1 で (有限) 群の表現論の一般論の基礎事項を説明した後, Chapter 2 では Chapter 1 の結果の対称群の場合への応用, Chapter 3 では組合せ的アルゴリズム, Chapter 4 では対称関数を中心に対称群の表現論を展開しています.

表現論では代数的な手法が用いられることが多いですが (この本の Chapter 1 もそう), 対称群の表現論においては Young 図形という組合せ的対象が活躍し興味深い理論が展開されます. 例えば, Chapter 2 では対称群のすべての既約表現は Young 図形を使って具体的に作ることが出来ることなどが示されます. 実際のセミナーではこのあたりまで読めるのではないかと思います. 余裕があれば, 後半のトピックを選んで読むことも可能かもしれません.

予備知識としては群・線形代数の基礎を仮定します. ただし, 群については必要な事項は少ないためチューターに説明してもらえば十分対応できると思います.

8 Complex Algebraic Curves - Frances Kirwan

■難易度の目安 ☆☆☆

代数曲線とは, 大まかに言えば, ある多項式 $P(x, y)$ の値を 0 にするような点 (x, y) 全体のことです. 例えば直線・円・放物線・双曲線・楕円は代数曲線で, みなさんもなじみがあると思います. これらは次数が 1 ないし 2 の (1 次や 2 次の多項式で定義される) 曲線ですが, もっと次数の高い曲線も考えられます.

高校では x, y の値が実数である点のみを考えていたと思いますが, より広く x, y が複素数である点を考えることにし, また多項式の係数の範囲も複素数まで広げることにしたのが, 本書のテーマである複素代数曲線 (complex algebraic curve) です.

複素数の範囲で考える利点のひとつに, 実数のときと異なり, 代数方程式が必ず解をもつことがあります. 例えば, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ で定まる曲線と $x^2 + y^2 - 1 = 0$ で定まる曲線は実数の範囲で考えると様子が異なります (前者は空集合になってしまいます) が, 複素数の範囲で考えるとこれらを統一的に扱うことができます.

本書では複素代数曲線をさまざまな視点から見ていきます．そのうち，セミナー中に扱う予定のものを紹介します．

代数的な話 m 次の曲線と n 次との曲線との交点は mn 個以下ですが，「重複度」を込めて数えるとちょうど mn 個であるということ (ベズーの定理) を示します．

幾何的な話 曲線がどのような形をしているかを考えてみましょう．複素曲線は（実）4 次元の空間の中の（実）2 次元の図形なので，実曲線の場合のようにグラフを描いて考えることは困難です．複素代数曲線は「穴のいくつか空いた浮き輪」のような形をしていることを（穴の数がいくつになるかも含めて）示します．

なお，これらの話をうまく展開するためには，曲線に「無限遠点」とよばれる点をいくつか付け加えることが必要です．このことも説明されています．

予備知識として，高校範囲の微積分と，行列の基本的なこと (行列式の性質など) および，位相空間の初歩 (コンパクト性・ハウスドルフ性・商位相など) についての理解を仮定します．

9 A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre

■難易度の目安 ☆☆☆

本書は 7 章からなり，整数論の代数的な取扱いについても，また解析的な取扱いについても触れています．そのうち，今回のセミナーでは「保型形式」をテーマとする第 7 章を扱う予定です．

本書で扱う保型形式とは，大まかに言えば，複素上半平面 $H = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ 上の関数 f であって，$ad - bc = 1$ なるすべての整数 a, b, c, d に対して

$$f(z) = (cz + d)^{-2k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

という関数方程式 (k は「重さ」とよばれる整数です) をみたすもの，として定義されます (実際には「保型形式」とはもっと一般的な対象です．本書で扱われているのはそのうち最も簡単なタイプの保型形式に相当します)．

保型形式は解析的な色合いの濃い対象ですが，「素数の代数的な性質を集めて作られるある種の L 関数は，保型形式から作られる」という予想 (Langlands 予想) があるなど，代数と解析を結ぶ架け橋として数論的にも大変重要な対象と考えられています．Fermat 予想の解決などの近年の重要な結果もここで述べたことの研究によるもので，保型形式は現代整数論のまさに中心的なテーマの 1 つとも言えます．

本書では，上述のように，最も簡単なタイプの保型形式を論じており，重さ k のものをすべて求めたり，それから作られる L 関数の様子を調べるということが主な内容です．基本的な複素解析以外をほとんど用いずに保型形式の初歩を論じており，本書のこの章は，保型形式の入門的な解説書として高く評価されています．

内容の紹介は以上です．次に本書を読む上での予備知識について説明します．複素解析の基礎，具体的には

- 複素数 z に対する指数関数 e^z
- 「正則関数」「有理型関数」「極」などの言葉の意味や簡単な性質
- 基本的な無限和の扱い

などが必要となります.

これらの予備知識についてはセミナー初日に担当チューターが簡単に説明しますが, 1 からすべて証明するということはせず必要な定義や結果を整理する程度になります. そのため, 本書に興味のある方は事前にある程度複素解析について勉強しておいた方が良いと思います.

「どうやって勉強すればいいのかわからない」という方は, 少し大きめの本屋や図書館などで「複素解析」「複素関数論」などという言葉がタイトルに入っている本を探して, そのうち一番読みやすそうな本を読み進めてみてください. 所々消化できない部分があっても, 雰囲気を掴んでおけば大丈夫でしょう.