

2026 年度 JMO 夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団 JMO 夏季セミナー実行委員会

今年度の夏季セミナーで扱う本は以下の 8 冊です.

1. 安定マッチングの数理とアルゴリズム～トラブルのない配属を求めて～ / 宮崎修一
2. フリーズの数学 スケッチ帖—数と幾何のきらめき— / 西山 享
3. Almost periodic functions / Harald Bohr
4. 数理論理学 / 嘉田勝
5. 結び目の数学—結び目理論への初等的入門 / C. アダムズ
6. 楕円曲線論入門 / J. H. シルヴァーマン, J. テイト
7. 曲線と曲面の微分幾何 / 小林昭七
8. 連分数と楕円積分 / 杉山健一

分野は様々ですが, 大まかには簡単なものから順に並んでいます. このうち 1 冊を選び, 同じ本を選んだ数人の班員で**セミナー**を行います. 選んだ本について, 内容を分担して持ち回りで発表していきます. 夏季セミナーの最後には, 学んだことについてまとめて全体に発表します. それぞれの班には専属のチューター (数学オリンピックの OB/OG) が付き指導にあたるので, 安心してください.

セミナーで使う本はこちらで用意しますので, 事前に購入する必要はありません. 班分けは初日に行います.

夏季セミナー初日には, 担当のチューターによる本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください (なお, 紹介文の執筆者が当日も同じ本の担当になるとは限りません).

次のページから, それぞれの本で扱う内容や前提知識などについて詳しく紹介していきます.

洋書を読むにあたって

3 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりでまったく分からないのではないかと思いますけれども, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての用語は必ず定義が述べられるので, 知らない用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学校で習う程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるとよいでしょう.

洋書の選択を考えている人は, 英和辞典を持参するとよいかもしれません. 通常のものでよいですが, 数学英和辞典があるとより便利でしょう. なお, 数学英和辞典はこちらでも何冊か用意して貸し出しますので, 新たに買う必要はありません.

1 安定マッチングの数理とアルゴリズム～トラブルのない配属を求めて～ - 宮崎修一

学生を研究室に配属する、研修医を病院に配属する、学校と生徒をマッチングする、といった場面を考えます。それぞれの学生や病院には希望順位があり、全員の希望を完全に叶えることは普通できません。このとき、多くの人を、できるだけ不満が出ないように配属するにはどうすればよいでしょうか。

そこで重要になるのが「安定性」という考え方です。ある配属において、「今の相手よりこの人・この病院の方がよい」と互いに思っている病院と人の組が存在すると、その病院もその人も不満がたまります。このような不満が存在しない配属を、安定なマッチングと呼びます。

本書では、この安定マッチングを求めるための代表的な方法である Gale-Shapley アルゴリズムを中心に、安定な配属が必ず存在することや、どのような方法で最適な配属が得られるのかを学びます。また、条件を少し変えると問題が急に難しくなる場合もあり、現実の配属問題と数学・アルゴリズムの関係を知ることができます。

身近な話題も扱っており、証明も比較的追いやすく、具体例を通して理解しやすいテーマだと思います。グラフ、組合せ、アルゴリズムに興味がある人や、数学が現実でどのように応用されているかを知りたい人におすすめです。

予備知識は特に必要ありません。

(文責：飯島 隆介)

2 フリーズの数学 スケッチ帖—数と幾何のきらめき— - 西山 享

タイトルにもあるフリーズという数遊びを紹介します。図1のように1行目と2行目にそれぞれ0と1を並べ、3行目に数列(この数列を種数列とよびます)を書き込みます。図1では2, 2, 1, 4, 1, 2を繰り返した周期数列を書き込んでいます。4行目以降はユニモジュラー規則(SL_2 規則)とよばれる規則で埋めていきます。ユニモジュラー規則とは、4つの数が図2のように並んでいるとき、 $ad - bc = 1$ をみたすというものです。

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
	2	2	1	4	1	2	2	2	1	4	1	2	...		b
	3	1	3	3	1	3	3	1	3	3	1	3	...		a d
		1	2	2	2	1	4	1	2	2	2	1	...		c
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...		
				0	0	0	0	0	0	0	0	0	...		⊗ 2

図1

今回の場合、3行目から5行目には正の数が、6行目に1が、7行目に0が並びました。このような性質は種数列がどのようなときに成り立つのでしょうか。種数列として1, 2, 3を繰り返した周期数列、1, 2, 3, 4を繰り返した周期数列では、そして皆さんが用意した適当な数列ではそれぞれどうなるのか、計算してみてください。

これは一見すると代数的な話題に見えますが、実は凸多角形の三角形分割と関連しています。図3のように凸6角形における(その頂点のみを用いた)三角形分割を考えます。各頂点にはその頂点に集まる三角形の個数を書き込みます。このとき、図3の上の頂点から時計回りに頂点に書き込んだ数を並べると、一番初めに紹介した種数列の2, 2, 1, 4, 1, 2が得られます。(このようにして得られる数列を本書では奇跡列とよんでいます。)

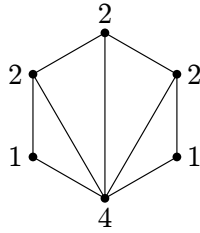


図 3

一般に, 凸 m 角形の三角形分割の奇跡列を繰り返した周期数列を種数列としてフリーズを作ると, 3 行目から $m-1$ 行目に正の数が, m 行目に 1 が, $m+1$ 行目に 0 が並ぶことが知られています. 逆に, ある条件をみたすフリーズの種数列は凸多角形の三角形分割の奇跡列と対応していることがわかります. この事実を Conway-Coxeter の定理とよびます.

本書は, Conway-Coxeter の定理の証明をはじめとしたフリーズに関連した話題, それにまつわる数学を扱っています. 本書では行列式などの線形代数を用いますが, 必要な知識についてはチューターが補足しますので知らなくても問題ありません.

(文責: 沖 祐也)

3 Almost periodic functions - Harald Bohr

almost periodic function は直訳すると「ほとんど周期的な関数」という意味です. ほとんど周期的とはどのような関数でしょうか? まずは周期関数について考えてみましょう. 以下はすべて周期関数です:

$$e^{ix}, e^{ix} + e^{2ix}, e^{ix} + e^{\frac{3}{5}ix}$$

$e^{ix} (= \cos x + i \sin x)$ が周期 2π の周期関数であるため, それぞれ $2\pi, 2\pi, 10\pi$ を周期としてもちます.

では, $e^{ix} + e^{\sqrt{2}ix}$ はどうでしょう? この場合, $\sqrt{2}$ は無理数であるため, e^{ix} と $e^{\sqrt{2}ix}$ は共通の周期をもちません. 実際これは周期関数ではないことがわかります ($x=0$ で 2 をとりますがそれ以外では 2 をとりません). しかし, これは次のように考えることで, 「ほとんど周期的」といえるかもしれません:

$\varepsilon > 0$ を任意にとります. $\delta > 0$ を十分小さくとり, $|2\pi p - \frac{2\pi}{\sqrt{2}}q| < \delta$ をみたす正整数 p, q をとります (とれることが知られています). いま, $2\pi p$ と $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}q$ はそれぞれ $e^{ix}, e^{\sqrt{2}ix}$ の周期であり, $2\pi p$ と $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}q$ の間にある実数 τ をとれば, τ は「 $e^{ix}, e^{\sqrt{2}ix}$ の周期に近い」実数です. 実際, $f(x) = e^{ix} + e^{\sqrt{2}ix}$ とおけば, δ を十分小さくとることで $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ が任意の実数 x で成り立ちます.

このように, almost periodic function は, ざっくりいえば「ある一定の長さを持つ任意の区間から τ をうまくとることで, $|f(x+\tau) - f(x)|$ を一様に十分小さくとれる」ような関数 f というように定義されます.

もう少し深く見てみましょう. 2π を周期に持つ連続な関数 f に対して, フーリエ級数というものを考えます. これを用いることで, フーリエ級数の理論から, f は

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad (c_n \in \mathbb{R})$$

の形で十分正確に近似できることがわかります (正確に言えば, e^{inx} が生成する空間 $\subset C(\mathbb{R})$ の一様ノルムによる閉包が, 2π を周期にもつ連続関数全体の集合に一致します). これは周期 2π の連続な周期関数の特徴づけにもなってい

ます.

さて、この和の形を少し変えてみましょう. 次のような形を考えます:

$$\sum_{n=1}^N c_n e^{i\lambda_n x} \quad (c_n \in \mathbb{R}, \lambda_n \in \mathbb{R}).$$

λ_n が実数値をとれるようになっていきます. これは先ほど見た通り, 一般には周期関数ではありません. では周期関数の場合と同様に, 「この形で近似できるような関数の集合」がどのようなかを考えたいとなります. 実は, この集合は almost periodic function の集合と一致することがわかります.

この本の目標はこれを証明することです. 著者は almost periodic function を定義した Bohr 自身 (ちなみに量子論で有名なボーアの弟らしい) であり, 1 節から 38 節までが周期関数について, 39 節から 93 節が almost periodic function について, 基本的に一から書かれています. セミナーで証明をすべて追うのは難しいかもしれませんが, 大学で学ぶ解析学の雰囲気を知りたい人は選んでみるとよいと思います.

予備知識は高校までの微積分と一部の大学範囲の基礎的な微積分です. 必要な知識は適宜チューターが解説しますが, とくに以下の単語について事前に調べてみるとよいでしょう: ε - N 論法, 一様収束, 一様連続.

(文責: 林 康生)

4 数理論理学 - 嘉田勝

数理論理学, あるいは数学基礎論とは, 数学の理論における論理 (あるいは集合, 証明, ... など) がどういった構造をしているかを調べる分野です. 数理論理学は大きく, 集合論, 証明論, モデル理論, 再帰理論の 4 つの下位分野に分けられます. その中でも, 今回のセミナーではモデル理論, およびそのための道具として証明論の基本的な内容を扱います. では, モデル理論とはどのような分野でしょうか. それを見るために, 次の問題を考えてみましょう.

集合 $\mathbb{R}^*$ と, $\mathbb{R}^*$ 上の 2 項演算 $+$, $-$, $\times$, 2 項関係 $\leq$, そして $\mathbb{R}^*$ の要素 $0, 1$ の組 $(\mathbb{R}^*, +, -, \times, \leq, 0, 1)$ であって,

1. 通常の実数の範囲で成り立つ全ての「文」が成り立つ.
2. ある要素 $c \in \mathbb{R}^*$ が存在して, $1 \leq c, 1+1 \leq c, 1+1+1 \leq c, \dots$ がすべて成り立つ.

のいずれもみたすようなものは, 存在するか. ただし, 「文」に使ってよい言葉は「+」, 「-」, 「 $\times$ 」, 「 $\leq$ 」, 「0」, 「1」, 「=」, 「かつ」, 「または」, 「でない」, 「ならば」, 「すべての x に対して」, 「ある x に対して」, 適当な名前の変数 (直前の x に入れることが可能), および括弧のみとする.

つまり, 通常の実数で成り立つような「文」

- すべての x に対して $x+0=x$
- ある x が存在して $1+1=x \times x$ (つまり, 2 乗して $1+1(=2)$ になるような要素が存在する)
- 「ある x が存在して $0-1=x \times x$ 」でない
- すべての x に対して, すべての y に対して, 「 $x+y=0$ ならば $y+x=0$ 」

がすべて成り立ちつつも, $1 \leq c, 1+1 \leq c, 1+1+1 \leq c, \dots$ がすべて成り立つような c が存在するという, 実数とは異なる性質をもった構造が存在するのか? という問題です. 驚くべきことに, 答えは YES です. このような $\mathbb{R}^*$ および演算の構造は「超準実数」とよばれており, 実は解析学など「いつもの」数学にも応用されています.

話を戻すと, モデル理論とはこのように, 演算や関係を表す記号を用いた論理式で性質が記述されるような構造 (これを **モデル** といいます) を調べる分野です. 上記のほかにも, 近年数理論理学にとどまらずさまざまな応用が知られて

いる、非常に興味深い分野となっています。今回のセミナーでは、論理の基本的な内容の導入から始め、上に示したような通常のモデルとは異なるようなモデルを構成する「コンパクト性定理」まで扱うことを目標にします。本書では第 I 部の最後までが該当する範囲となっています。前提知識は特にありませんが、 $\wedge, \vee$ などの論理記号の意味について簡単に調べておくと読み進めやすくなると思います。

(文責：北村 隆之介)

5 結び目の数学—結び目理論への初等的入門 - C. アダムズ

この本の主役は結び目・リンク (絡み目ともいう) です。3次元空間内で1本のひもを絡ませ、両端をつなぎ合わせたものを結び目といい、いくつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものをリンクといいます。このひもは自由に伸び縮みするものとし、ひもを動かすことによってうつりあうものを同一視することにします。結び目を平面に写しとった図 (射影図) を考えると、同じ結び目同士の変形は平面上ではライデマイスター移動とよばれる3種類の基本移動の組み合わせによって表されます。

与えられた2つの結び目の射影図同士が同じ結び目であるか否かを判定せよ、というのは難しい問いですが、結び目の射影図それぞれにある量 (多項式など) を対応させることを考えたとき、その量が3種類のライデマイスター移動によって変化しなければ、それは同じ結び目上では変化しないということを意味し、結び目不変量とよばれます。そして (同じ結び目不変量をもつ結び目の射影図同士が同じ結び目とは限りませんが)、結び目不変量が異なる結び目の射影図同士は異なる結び目であることがわかるので、結び目不変量を見つけることは結び目を分類するために大切なことです。この本では、リンクに向きを付けたり、上で定義した組みひもとの対応を考えたりすることにより、実際にいくつかの結び目不変量を構成します。

本書では、多項式、絡み目、組みひもとの関係、そして、生物学、化学、物理学、グラフへの応用などを扱います。

この本を読むにあたって、群の定義や行列の演算を知っていると少し読みやすいですが、必要に応じてチューターがセミナー中に説明するので、予備知識は特に仮定しません。

(文責：北山 勇次)

6 楕円曲線論入門 - Joseph H. Silverman, John Tate

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の形の方程式 (a, b, c はほとんど任意) が与えられたとき、この方程式をみたす点 (x, y) 全体のなす曲線を楕円曲線と呼びます。楕円曲線が与えられたとき、その上に有理点 (x 座標も y 座標も有理数である点) や整点 (x 座標も y 座標も整数である点) がはたして存在するか、また存在するならば無限個か有限個か、という興味ある問題が発生します。一般にこのような問題に答えることは簡単ではありません。たとえば、 $y^2 = x^3 - 5x$ 上には無限個の有理点がありますが、 $y^2 = x^3 - x$ 上にはなんと $(0, 0), (\pm 1, 0)$ の3個しかありません。

楕円曲線には特殊な性質があります。それは、曲線上にある2点を「足し合わせ」て新たな点を得る操作 (加法) が存在し、さらにこの操作による有理点と有理点の「和」はまた有理点になるというものです。たとえば、 $y^2 = x^3 - 2$ 上の有理点として $(3, 5)$ はすぐに見つかりますが、この点を「2倍」する $((3, 5) \text{ と } (3, 5) \text{ を足す})$ と $\left(\frac{129}{10^2}, -\frac{383}{10^3}\right)$ 、さらにこれを「2倍」すると $\left(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3}\right)$ になり、簡単には見つからない有理点が次々と計算できます。この点と点の「和」から、さまざまな楕円曲線の深い性質が導かれます。

本書の前半部分では、自分自身を何回か足し合わせると0になるような有理点は有限個しかない (群論の用語を用い

れば、「位数が有限の有理点は有限個しかない」という **Nagell–Lutz の定理**や、すべての有理点はある有限個の点を足し合わせることで得られる（群論の用語では「有理点のなす群は有限生成である」という **Mordell の定理**などを証明していきます。セミナーではこの前半部分から読む箇所を選ぶことになるでしょう。時間があれば、これらの応用として、 $y^2 = x^3 - x$ 上の有理点が上記の 3 つのみであることの証明まで読めるかもしれません。

丁寧に説明されていますので、はじめて楕円曲線に触れる人でも問題なく読み進められると思います。代数・数論・幾何と様々な分野が融合しますが、高等な予備知識は特に必要ありません。高校レベルの座標幾何と多項式の微分を知っていれば十分でしょう。（可換）群に対して親しみがあれば読みやすいと思いますが、必須ではありません。

（文責：新井 秀斗）

7 曲線と曲面の微分幾何 - 小林昭七

空間内にある曲線や曲面について、その各点での「曲がり具合」を測るにはどうすればよいでしょうか。例えば、半径 1 の円と半径 2 の円を比べると、半径が短い円の方がよりカーブがきついため、局所的な「曲がり具合」は半径 1 の円の方が大きいと言えます。このように、同じ円という図形でも「曲がり具合」は異なるので、「曲がり具合」をきちんと定義するには「長さ」の概念が必要だろうということが分かります。曲がった曲線の「長さ」を測るにはどうすればよいかというと、各点での接ベクトル（接線方向のベクトル）の長さを定めて積分すればよい、というふうに考えることができます。このように、各点での接ベクトルに対して「長さ」が定まっているような図形（曲線、曲面）を調べる学問が微分幾何です。この接ベクトルの「長さ」を用いて、曲線や曲面の局所的な「曲がり具合」（数学用語では曲率といいます）を実数として定義することができるのです。

曲率に関する微分幾何の重要定理として、Gauss-Bonnet の定理というものがあります。この定理の主張は、大雑把に述べると「曲率を曲面で積分すると、その曲面のオイラー数を 2π 倍した数になる」というものです。このオイラー数というのは、曲面をぐにゃぐにゃに変形させても変わらない位相幾何的な数で、曲率などの微分幾何的な情報とは関係なく定義されるものです。多面体を例にとって考えてみましょう。各頂点での「曲がり具合」（とがり具合）として、 $2\pi -$ （その頂点に集まる角度（弧度法）の和）という量を考え、これをすべての頂点について足し合わせてみてください。例えば正多面体でやってみましょう。4 π になるはずです。これは、球面と同じ形状を持つ（柔らかい素材でできていると思えば球面に変形できる）多面体ならいつでも 4π になります。この 4π は球面のオイラー数 2 を 2π 倍して得られる数なのです（実はこの事実がオイラーの多面体定理そのものです）。

本書は 5 章からなり、1, 2, 3 章では豊富な具体例に触れつつ曲線、曲面の微分幾何的な枠組み（接ベクトルの「長さ」の概念）の導入、曲率の定義、計算などを行います。そして 4 章で Gauss-Bonnet の定理を扱います。ここまで進むことを目指したいと思いますが、前半の方で具体例なども丁寧にやると 4 章まで進めないかもしれません。

予備知識としては、高校で学ぶ微分積分および行列（特に 2 次正方行列の行列式、固有値など）について知っていることを要求します。

（文責：古屋 楽）

8 連分数と楕円積分 - 杉山健一

連分数とは、以下のように分数の分母に分数が入っている入れ子構造をもつ分数です。

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

(係数が整数である) 有限連分数として表せる数は有理数ですが、逆に有理数は有限連分数として表すことができます。

$$\frac{28}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{13}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}$$

無限連分数について考えてみましょう。無限連分数として最も簡単な例は以下のように係数が循環しているものです。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

実は、これについても無理数 x が整数係数の 2 次方程式の解であることと x が循環する無限連分数で表せることは同値であることが知られています。

無限連分数で係数が規則性をもっている場合、循環していない場合は状況が複雑になります。

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{\ddots}}}}, \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{\ddots}}}}$$

このうち左の式は漸化式を用いて比較的簡単に証明することができますが、右の式には超幾何級数が関連しており証明は簡単ではありません。本セミナーでは、このうち右の式を示すことを目標にします。証明には複素解析の知識を用いますが、必要に応じてチューターが解説するため複素解析について予習してくる必要はありません。前提知識として、無限和の順序を無条件に入れ替えてはいけないなどの極限の正しい取り扱いについて知っていることが望ましいです。また、以下の用語についてある程度説明できることがよいでしょう：一様収束、収束半径。

(文責：三宮 春香)