2025 年度 JMO 夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

今年度の夏季セミナーで扱う本は以下の 8 冊です.

1. 代数学 1 群論入門/雪江明彦
2. 格子からみえる数学/枡田幹也・福川由貴子
3. 数理論理学/戸次大介
4. マレー数理生物学入門/James D.Murray
5. 複素関数論講義/野村隆昭
6. 数学のかんどころ 12 平面代数曲線/酒井文雄
7. Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More/Richard P.Stanley
8. 離散モース理論/N.A. スコーヴィル

分野は様々ですが, 大まかには簡単なものから順に並んでいます. このうち 1 冊を選び, 同じ本を選んだ数人の班員で**セミナー**を行います. 選んだ本について, 内容を分担して持ち回りで発表していきます. 夏季セミナーの最後には, 学んだことについてまとめて全体に発表します. それぞれの班には専属のチューター (数学オリンピックの OB/OG) が付き指導にあたるので, 安心してください.

セミナーで使う本はこちらで用意しますので, 事前に購入する必要はありません. 班分けは初日に行います.

夏季セミナー初日には, 担当のチューターによる本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください (なお，紹介文の執筆者が当日も同じ本の担当になるとは限りません).

次のページから, それぞれの本で扱う内容や前提知識などについて詳しく紹介していきます.

洋書を読むにあたって

7 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりでまったく分からないのではないかと思うかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての用語は必ず定義が述べられるので, 知らない用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学校で習う程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるとよいでしょう.

洋書の選択を考えている人は，英和辞典を持参するとよいかもしれません．通常のものでもよいですが，数学英和辞典があるとより便利でしょう．なお，数学英和辞典はこちらでも何冊か用意して貸し出しますので，新たに買う必要はありません.

1　代数学 1 群論入門 - 雪江明彦

群とは一定の性質 (単位元の存在, 逆元の存在, 結合則) をみたす二項演算が可能な集合です．以下に例をあげます．() 内が演算です．

- 整数全体の集合 (足し算)
- 正の実数全体の集合 (掛け算)
- n と互いに素な整数を $\mathrm{mod} n$ で考えたもの全体の集合 (掛け算)
- 一次関数全体の集合 (関数の合成)
- n 要素からなるあみだくじ全体の集合 (くじの結合)

群の演算によって生じる構造にのみ注目してその性質を調べていくのが群論です．群の定義はとても簡潔なため, 群となるものは数学において非常に多く現れます．群論を勉強しておくと, それらすべてに知見を活かせるというわけです．例えば, 上にあげた例の 3 番目を考えることで, 数学オリンピックにも登場するフェルマーの小定理や位数の議論, 原始根の存在などが群論の観点から見通しよく導くことができます．

このセミナーでは, まず群を定義し, 部分群や準同型, 剰余群, 正規部分群といった基本的な概念とその性質を扱います．さらに, 群の集合への作用という概念を導入し, それを用いて群の性質を明らかにしていきますが, その 1 つとしてシローの定理という重要な定理が証明されます．このシローの定理を証明することをセミナーの目標とします．

群論の展開はとても抽象的ではありますが, この本にはたくさんの具体例が載っているのでそれらが理解の助けになるでしょう．また, この本は数学書というものの雰囲気を知りたい人にも向いていると思います．

前提知識は基本的には必要ありません．具体例を把握するうえで行列の簡単な計算が必要になりますが適宜チューターが説明します．興味があれば予め調べておいてもよいでしょう．

(文責：渡辺 直希)

2　格子からみえる数学 - 枡田幹也, 福川由貴子

空間上の**格子点**とは, 座標成分が全て整数であるような点のことを指します．例えば, 平面上の点 $(2, 3)$ や, 空間上の $(3, -1, 4)$ などは格子点です．この本は, 格子点にまつわる数学を, オムニバス形式で紹介するものとなっています．先にあげた格子点の定義はとても単純ですが, そこにまつわる数学は, 非自明で, 様々な分野の概念が関係してくるものとなっています．実際に, 今回のセミナーで扱う予定の題材をいくつか見てみましょう．

1 章では, 平面内の格子点を結んでできる多角形 (格子多角形と呼ばれる) と, その内部の格子点について議論をしていきます．とくに, ピックの公式と呼ばれる次の定理は, この後の章でも使われる大事なものとなっています:

> 格子多角形 P の面積は次の式で求められる．
>
> $$(P\text{ の内側にある格子点の数}) + (P\text{ の辺上にある格子点の数}) \times \frac{1}{2} - 1$$

2 章では, 内部にも辺上にも格子点をもたないような三角形 (基本三角形と呼ぶ) からスタートして, ファレイ数列, およびスターンの 2 原子数列と呼ばれる不思議な数列について調べて行きます．この章では, 2×2 行列や連分数などが道具として使われます．

3 章では, 次に述べるオイラーの公式を中心として話が進んでいきます．ここで, **平面グラフ**とは, 平面上の点 (これを頂点と呼ぶ) を線 (これを辺と呼ぶ) で交わらないように結んだ図形のことです:

平面グラフ G に対して, 次の式が成立する.

$$(G\text{ の頂点の数}) - (G\text{ の辺の数}) + (G\text{ の面の数}) = 1$$

例えば, G が正四面体の一つの頂点を潰したようなグラフのとき, G の頂点の数は 4, 辺の数が 6, 面の数が 3 となり, 上の式がなりたつことがわかります. この定理は, 一見すると, グラフ理論や, トポロジーに関する定理であり, 格子点とはあまり関係ないように思えます. しかし, 実はこのオイラーの公式は, 上のピックの公式と同値であることが 3 章で証明されます.

これ以外にも, 6 章では, フェルマーの 2 平方和定理と呼ばれる, 整数論の有名な定理が道具としてでてきます. また 7,8 章は格子上の経路の場合の数をメインテーマとして, これにまつわる様々な手法を知ることができます.

このように, 格子点を切り口としつつ, 色々な分野の数学に触れることができるのがこの本となっています. 高校数学からすこし背伸びした範囲で, 大学数学の雰囲気を感じたい人におすすめです.

前提知識としては, 平面・空間ベクトルの計算 (足し算, 引き算と内積) に慣れていれば十分です. 2 章の途中に, 2×2 の行列の計算がでてきますが, チューターが適宜補足しますので知らなくても問題ありません.

(文責：神尾　悠陽)

3 数理論理学 - 戸次大介

論理学とは, 数学における証明そのものを考察の対象とした分野です. 論理学においては, 証明は論理式を連ねたものとして扱われます. 以下は証明の例です. (説明のために自然数などの具体的な状況にしていますが, 実際の論理学では抽象的な論理式を扱います.)

(1) 3 は奇数である.
(2) x が奇数ならば x^2 は奇数である.
(3) (1), (2) より, 3^2 は奇数である.

(1), (2) は正しい命題であり, (1) と (2) を組み合わせて得られた (3) は正しい命題です. つづいて, 以下の例を見てください.

(1) 3^2 は奇数である.
(2) x が奇数ならば x^2 は奇数である.
(3) (1), (2) より, 3 は奇数である.

この例では, (1), (2), (3) はどれも正しい命題ですが, これが (3) の正しい証明になっていないことはわかると思います. これは, (1) と (2) の組み合わせ方が適切でないことから生じています. そこで, 論理式の適切な組み合わせ方とは何なのか, 「正しい証明」というものはどのように定式化されるのかという疑問が生じます. この疑問に対する答えは大きく 2 つ知られており, その 1 つは各論理式に 0, 1 などの値を割りあてて推論の妥当性を議論する**意味論**によるもので, もう 1 つは**公理**から出発して**推論規則**に従って論理式を組み合わせることで証明を行う**証明論**によるものです.

この本は第 1 部 (1–6 章) と第 2 部 (7–13 章) から構成され, 第 1 部では意味論が, 第 2 部では証明論が扱われています. 本セミナーではこのうち第 2 部の証明論を扱います. また, この本を読むにあたって前提知識は特に必要ありません.

証明論の流儀でよく知られているものはヒルベルト流のもので, その中には最小論理の体系 **HM**, 直観主義論理の体系 **HJ**, 古典論理の体系 **HK** などがあります. **HJ** は **HM** に**爆発律** $\bot \to \varphi$ を, **HK** は **HM** に**二重否定除去律**

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ を加えたものです. これらの体系については以下のことが知られています.

- 一階命題論理の論理式 φ について, **HJ** で $\neg\neg\varphi$ が証明できることと **HK** で φ が証明できることは同値である. (**グリベンコの定理**)
- 二重否定除去律 $\neg\neg\varphi \to \varphi$ は **HJ** では証明できない.

この本にはこれらの証明が載っており, セミナーの進捗に応じて扱おうと思います.

(文責：三宮 春香)

4　マレー数理生物学入門 - James D. Murray

「ねずみ算」というものを聞いたことがある人がいるかもしれません. 1 月にねずみが 2 匹おり, 毎月, ねずみ 2 匹あたり 12 匹の子ねずみを産むとしましょう. このとき, t 月に生きているねずみの総数 N_m は,

$$N_{t+1} = N_t + 12 \cdot \frac{N_t}{2} = 7N_t \quad (t = 1, 2, \ldots)$$

という漸化式に従うことになり, 12 月には $2 \cdot 7^{11} = 3954653486$ 匹のねずみがいることになります.

もちろん現実ではそんなはずはないのですが, これは現実の現象の本質的な部分を数式で表現する**数理モデル**というものの最も原始的な例となっています. この漸化式の場合は, ねずみの数のあらゆる制約やゆらぎ, 偶然的な要素を捨象し, ねずみの数は指数関数的に増加する, という側面を切り出していることになります.

自然な課題の 1 つとして, こういったモデルをより現実に即したものとすることを考えます. ねずみの出生率を b とし, ねずみが一定の割合 d で寿命を迎えることを考えると,

$$N_{t+1} = bN_t - dN_t = (b - d)N_t \quad (t = 1, 2, \ldots)$$

という漸化式になり, さらにねずみの増加率がねずみの個体数に依存することまで考えると,

$$N_{t+1} = (b - d)\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)N_t, \quad (t = 1, 2, \ldots)$$

といった漸化式になります. あるいはねずみの年齢分布を踏まえた多項間漸化式のような系や, 雌雄のねずみの個体数を f_t, m_t と分けて記述する系も考えうるでしょう.

別方向の拡張として, 離散的なふるまいではなく連続的なふるまいを表現することも考えられます. ねずみの個体数 N が非常に大きくなる場合は, N を時刻 t の (適切な条件をみたす) 関数とみなすことができ, このとき N に関する条件は

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \quad N(0) = N_0$$

となります. このような連続的なモデルを採用する場合, 漸化式ではなく**微分方程式**がその主役となります.

さて, ここまであげたような数理モデルを特徴付ける式は, 一般には連続的な場合は

$$\frac{df_i}{dt} = F(t; f_1, f_2, \ldots, f_m), \quad f_i(0) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

のような形を, 離散的な場合は

$$c_t^i = F(c_\tau^j \mid 1 \leqq j \leqq m,\ 1 \leqq \tau < t)$$

のような形をしており, このような系を**力学系**といいます. 力学系という数学の分野は, このような現象のモデル化という問題との抱き合わせで発展してきた分野ともいえます. 力学系を用いた現象のモデリングでは, 主に以下の 3 つのポイントが重要となります.

1. モデルの問題： 解析したい現象があるとき, どのような力学系をモデルとして扱うのがよいか？ どのようなモデルが「良い」モデルか？
2. 数学的な問題： 力学系 (上でいう F) が与えられたときに, 系全体 (上でいう $f_1, f_2, \dots f_m$ など) のふるまいや特徴を知る方法はあるか？
3. 解釈の問題: モデルを解析して得られた結果は, どのように解釈するべきか？

今回のセミナーでは, さまざまな具体的なモデルを取り扱いつつ, 数理モデルを解析するための基本的な数学の概念 (logistic 方程式, Lotka-Volterra 方程式, 相平面解析, 局所安定性解析など) を学ぶことを目標にします.

予備知識としては, 高校で習う微積分に触れたことがあれば問題ないと思います. 発展的な知識についてはチューターが適宜説明を加えるほか, あまり複雑なモデルややややこしい概念は扱わずに, 多くの部分を手を動かしながら学ぶことになると思います.

(文責：吉田 智紀)

5　複素関数論講義 - 野村隆昭

この本は**複素解析学**という分野の入門書です. 高校で学ぶ微積分では, 実数に対して定義され実数値をとる関数 (実関数) を扱いますが, その定義域および終域を複素数に拡張したものを**複素関数**といい, 複素関数に対して微積分の概念を拡張して考えるのが複素解析学という分野です.

実関数 $f(x)$ が微分可能であるとは, 定義域に含まれるすべての x について極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在することであり, この極限 $f'(x)$ を x の関数とみなして $f(x)$ の導関数というのでした. $f(z)$ が複素関数の場合でも, 実関数の場合と同様に微分可能性や導関数が定義されます. ただし, 複素関数の場合は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ という極限において h を 0 に近づける方法が, 実関数の場合より「多い」ため (この表現は感覚的なものですが, 要するに複素数が複素平面で表されるように 2 次元的に広がっていることが関係して), 複素関数に対する微分可能という条件は (微分可能な複素関数は**正則関数**とよばれます) 実関数の場合よりもかなり「強く」なります. たとえば, 正則関数は 1 度のみならず何度でも微分できることがいえますし, ある点の近傍での値が分かるだけで他のすべての部分での値も決まってしまいます.

では, 複素関数に対して「積分」を考えるにはどうすればよいでしょうか？これは, ある曲線に沿って実関数の定積分と同様の値を考えることで実現され, 特に正則関数でこのような積分を考えると様々なよい性質が成り立ちます. その応用として, 実関数の定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ や $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin^2 x}\,dx$ $(a>0)$ を (わざわざ複素数の世界に持っていくことで！) 簡単に計算することができます. 複素関数の積分では, 関数 $f(z)=1/z$ における点 $z=0$ のように, 定義できていない点 (**特異点**) の周りの情報 (特に**留数**とよばれる値) を調べることが鍵となります.

セミナーでは, 留数を使ってある種の積分が求まるという定理 (**留数定理**) を目標にしたいと思います. 余裕があれば, 発展的な話題として無限和や無限積による三角関数の表示についても読み進めることができるかもしれません. 予備知識としては, 高校で習う程度の複素数や微積分の知識を仮定します.

（文責：宿田 彩斗）

6　平面代数曲線 - 酒井文雄

皆さん人は直線や円の性質について調べるときに初等幾何を用いてきたと思いますが, 代数学を用いた議論ができないだろうかと考えたことはあるでしょうか. 直線も円も多項式 $P(x,y)$ を用いて $P(x,y)=0$ と表されるので, 多項式 $P(x,y)$ のことをより知ることで初等幾何ではできない新しいことができると思いませんか？平面代数曲線はこの観点から直線や円を一般化したものです. 多項式 $P(x,y)$ に対して $P(x,y)=0$ として表される曲線を (アフィン) 平面代数曲線とよびます. たとえば直線や円, 楕円や双曲線, 少しマイナーな曲線ですが楕円曲線やレムニスケートもすべて平面代数曲線です. この本では, このような多様な平面代数曲線の性質を多項式の性質をメインの武器として調べることを目標としています.

さて, 平面代数曲線の性質としてどのようなものを考えればよいでしょうか. この本ではいくつかのトピックが扱われていますが, その中に 2 つの平面代数曲線の交点の個数を考えるというものがあります. 交点の個数についてはベズーの定理とよばれる有名な結果があります. この結果を簡単に説明すると (共通成分を持たない)m 次曲線と n 次曲線は (複素数の範囲で考えて, 無限遠での交点も含め, 重複を適切に勘定すると)mn 回交わるというものです. この定理を用いるとパスカルの定理といった初等幾何では示すのが難しい定理を簡単に示すことができます. また, この定理を証明するには射影空間や交点数といった平面代数曲線に留まらずより一般の代数幾何学でも重要になってくる概念の初歩も学ぶことができます.

この本は, まず 2 章で多項式の剰余関係やテーラー展開について学びます. 3 章で基本的な概念を導入し, 4 章で強力な道具である終結式を学びます. 5 章で射影曲線を導入し, その一般的な性質を示します. 6 章で 5 章を踏まえて具体的な曲線で様々な性質を見ていきます. 最後の 7 章は局所的な特異点や交点数についてより深く考えます. セミナーでは 5, 6 章あたりを目標に読んでいければと思います.

予備知識は線型代数です. 特に, この本では行列を用いた連立方程式の解法や解の存在の議論をしばしば用いるのでその辺りに慣れておくとよいでしょう. また, 本書では多項式を考えることが非常に多いので多項式の扱いに慣れていると良いです. 群や環, 体の初歩を知っていると本書がより読みやすくはなりますが必要な部分はチューターが適宜補足するので知らなくても問題ありません.

(文責：新井 秀斗)

7　Algebraic Combinatorics - Richard P. Stanley

キーワード　Sperner の定理，Burnside の補題，Young 盤，行列木定理，Kirchhoff の法則，......

> 正 M 角形の各頂点に 1 以上 N 以下の整数のうち 1 つを書き込む方法であって（回転や反転で一致するものも区別する），隣りあう 2 頂点に書き込まれた数がつねに相異なるようなものの総数を，M, N を用いて表せ.

みなさんはきっと，この問題に対する様々な解法を与えられることと思います．では，さらにここから条件を増やしていくとどうなるでしょうか？　例えば,「差が 1 の 2 整数も隣接する 2 頂点に書き込んではならない」ことにするとどうなるでしょうか？　そのうえで，やはり「偶数は同じものでもいくつでも並べて書いてよい」ことにするとどうなるでしょうか？　それぞれの固有の状況に対する解法には思い至ることができるかもしれませんが，なるべく統一的な手法はないでしょうか？

この問題で求めるものは，N 頂点の然るべき（無向）グラフ G における長さ M の閉道 (closed walk) の総数であると言いかえることができ，さらにこれは G の隣接行列の固有値の M 乗和として計算できます．このように，純粋

に組み合わせ論的な対象を扱ううえで, 線型代数や群論などを活用した代数的な手法は強力です．この本では，そうした手法が特に有効にはたらくいくつかの基本的なトピックを，オムニバス的に紹介しています．

線型代数や群論じたいを多少なりとも学んだことがある人は少なくないでしょう．しかし，実際どのように応用されていくのかというのは初学の段階では案外見えづらく，これらの分野の学習を難しくしている大きな要因の一つであるとも言えるかもしれません．より進んだ数学を十分に勉強していくと，これらの分野はもはや「応用」というよりかはほとんど「言語」のように取り扱わねばならないものであることが実体験としてわかっていきますが，中高生の段階ではなかなかそこまでは到達できないものです．そこで,「これらの分野をとりあえずある程度は学んでみたので，具体的に応用される状況に接してみたい」という人にこの本はおすすめできるでしょう．

したがって，裏を返せば，この本を選択するにあたっては線型代数および群論の基本的な知識（あるいは「感覚」）の持ちあわせは要求することになります．具体的には，次の語のうちほとんどすべてについてごく最低限の説明ができることが望ましいです．事前の学習・復習の目安にしてください：(実ベクトル空間の）基底・次元,（実正方行列の）行列式・固有値・対角化（およびそれらの具体的な計算方法)，群・部分群・群準同型,（群の集合への）作用.

(文責：平山 楓馬)

8　離散モース理論 - N.A. スコーヴィル

本来のモース理論とは, 可微分多様体 (円周やトーラスなど) 上の **モース関数** という性質の良い微分可能関数の停留点 (勾配が 0 になる点) を調べることで, その多様体の形を知るという幾何学の一つの道具です．たとえばトーラスの場合, モース理論はしばしば 3 次元のユークリッド空間にトーラスを埋め込み, モース関数として z 座標を考え, 接平面の勾配が 0 になる点について調べるというイメージを持たれます．この理論は, 一部の特徴的な点について考えることで多様体全体の形が分かるという点で強力なものです．本書では, このモース理論の “離散版” である離散モース理論を扱います．純粋幾何学的な非自明さは伴わないものの, 組み合わせ論と幾何学が密接に関連し合っており, これ自体非常に興味深い理論です．

離散版ということで, 考える対象は可微分多様体ではなく **単体複体** とよばれる対象の幾何的な構造になります．単体複体というのは, 大まかには, 点, 線分, 三角形, 四面体, . . .(単体とよびます) いくつかを, それぞれの境界でぴったり張り合わせた対象です．単純な例だと, グラフは点と線分のみからなる 1 次元の単体複体としてみることができます．単体複体自体は組み合わせ的な対象ですが, これを幾何的にとらえることもできます．たとえば, 図 1 と図 2 はどちらもグラフですが, 直観的には形が異なっています: 図 1 は “穴” が空いていますが, 図 2 は空いていません．このように, 1 次元の “穴” やより高次元のそれを数えることで, ある程度単体複体の幾何的な構造を取り出すことができます．

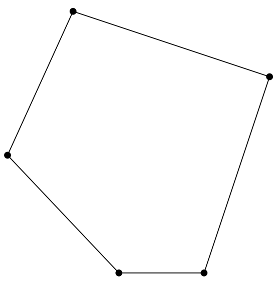
図 1

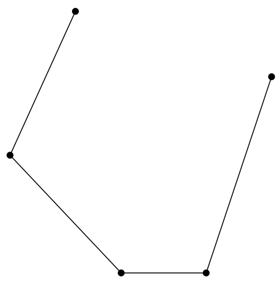
図 2

さて, モース理論を単体複体で展開するには, 単体複体上で勾配やそれが 0 になる停留点を考えたいです．これは,

モース関数の類似としていくつかの良い性質をもつ **離散モース関数** という各単体から実数への関数を考え, それをもとに単体複体上の勾配の向きを考えることで実現できます. そして実際にこれらの停留点は, 単体複体の “穴” の数を知るには十分な情報を持っているというのが, 離散モース理論の大きな帰結の一つなのです.

本書は 11 の章からなっており, それぞれの章では離散モース理論の基礎からその応用まで扱われています. 本セミナーでは, 1 章で単体複体の基本的なこと, 2 章で離散モース関数, 3 章で “穴” の数を知る道具としての単体ホモロジーのを導入を行い, 8 章で離散モース関数が単体ホモロジーを知るのにどのように活躍するのかをみることを目標とします. これらの章以外にも興味深い話題が多く載っているため, 関心に応じて扱うかもしれません.

本書は前提知識がなく読めるようになっていますが, 一週間で様々な内容を扱うため, ホモロジー群を扱う際に出てくる線型代数の知識があるとよいでしょう. 具体的にはベクトル空間の抽象的な定義や, 表現行列を用いた線型写像の計算を理解しているとよいです. 行列の対角化などの知識は不要です. 幾何学の知識は不要ですが, モース理論について簡単に調べておくとより楽しく読めるかもしれません.

(文責：北村 隆之介)