2024 年度 JMO 夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO 夏季セミナー実行委員会

今年度の夏季セミナーで扱う本は以下の 8 冊です.

1. 石取りゲームの数学 - 佐藤文広
2. 位相への 30 講 - 志賀浩二
3. 計算論 - 高橋正子
4. 計算で身につくトポロジー - 阿原一志
5. 応用微分方程式 - 小川卓克
6. グレブナー基底と代数多様体入門 - D.A.Cox, J.Little, D.O'Shea
7. 加群十話 - 堀田良之
8. Transcendental Numbers - M.R.R.Murty, P.Rath

分野は様々ですが, 大まかには簡単なものから順に並んでいます. このうち 1 冊を選び, 同じ本を選んだ数人の班員でセミナーを行います. 選んだ本について, 内容を分担して持ち回りで発表していきます. 夏季セミナーの最後には, 学んだことについてまとめて全体に発表します. それぞれの班には専属のチューター (数学オリンピックの OB/OG) が付き指導にあたるので, 安心してください.

セミナーで使う本はこちらで用意しますので, 事前に購入する必要はありません. 班分けは初日に行います.

夏季セミナー初日には, 担当のチューターによる本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください (なお，紹介文の執筆者が当日も同じ本の担当になるとは限りません).

次のページから, それぞれの本で扱う内容や前提知識などについて詳しく紹介していきます.

洋書を読むにあたって

8 は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりでまったく分からないのではないかと思うかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての用語は必ず定義が述べられるので, 知らない用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学校で習う程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるとよいでしょう.

洋書の選択を考えている人は，英和辞典を持参するとよいかもしれません．通常のものでもよいですが，数学英和辞典があるとより便利でしょう．なお，数学英和辞典はこちらでも何冊か用意して貸し出しますので，新たに買う必要はありません.

1　石取りゲームの数学 - 佐藤文広

この本では,

- 偶然性に依存しない
- 互いの持ち手が隠されたりせず, 情報が完全に公開されている

という性質をもつゲーム (**組み合わせゲーム**と呼ばれます) のなかでも,

- どちらか一方のみが勝つ
- 2 人のプレイヤーに同一の指し手が許されている
- 有限回の指し手で必ずゲームが終了する

という条件をもつようなゲーム (**不偏ゲーム**と呼ばれます) を扱います．このようなゲームは先手必勝または後手必勝に分類することができ, その背景には様々な美しい代数的性質があることが知られています．代表的な例としてニムがあげられます．ニムとは, 最初いくつかの石の山 (石をいくつか集めたもの) があり, 二人のプレイヤーが, 1 つの山を選んでそこから石を好きな個数だけ取り除くということを交互に繰り返し, 最後の石をとった方が勝ちというゲームです．このような単純なゲームの必勝法の背景には, ゲームの状態を表す Grundy 数や複数のゲームを足し合わせる演算であるニム和など, 美しい数学があります.

この本の構成としては, はじめの 3 章でニムを用いてニム和や Grundy 数の導入をした後, 4 章以降ではニムに類似したゲームなどをふまえながら, これらの組み合わせゲームの性質を扱う理論である組み合わせゲーム理論について, いくつかの話題を扱います．また, 12 章では最後に石をとった方が負けとなるような, 逆形と呼ばれているゲームを通じて組み合わせゲーム理論の踏み込んだ話題にもふれています．この本の後半では, 各章が独立した内容を扱っているため, 参加者の好みに応じて読む範囲を決めていくことになると思います．予備知識は特に必要ありません.

(文責：井本 匡)

2　位相への 30 講 - 志賀浩二

実数から実数への関数 f と実数 a, α について, $x \to a$ のときに $f(x)$ が α に収束するというのは, 感覚的には x が a に「近づく」ときに, $f(x)$ が α に「近づく」という意味です．これをきちんと数学的に定式化すると, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」となります．この定式化をみると, x と a や $f(x)$ と α の「近さ」というものは $|x-a|$ や $|f(x)-\alpha|$ によって測られているといってよさそうです.

このことを踏まえると, 実数全体の集合に限らず, 一般の集合 X に対しても 2 点の近さを測る関数 (**距離**) があれば, 実数を使って考えていた収束や連続などの概念を導入することができるように思われます．このアイデアを実現したものが距離空間です．具体的に定義を述べると, 2 つの X の元の組に対して定義され, 0 以上の実数値をとる関数 d が X 上の距離であるとは次の 3 条件をみたすことをいいます.

- 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x,y) = 0$ と $x = y$ は同値である.
- 任意の $x, y \in X$ に対して, $d(x,y) = d(y,x)$ が成り立つ.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ．(三角不等式)

距離の例を挙げると, n 個の実数の組全体からなる集合 $\mathbb{R}^n$ において, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に

対し, なじみ深いユークリッド距離 $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ は実際に $\mathbb{R}^n$ 上の距離となっていることがわかります. また, 別の $\mathbb{R}^n$ 上の距離として $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ という距離も考えられ, これはマンハッタン距離と呼ばれています. さらに, 一定の性質をもった関数の集合にも距離を考えることが多々あります.

距離空間をさらに一般化したものが位相空間です. 位相空間は「点どうしの繋がり方」の情報を含んだ空間ということができ, 収束や連続といった概念がやはり定義できます. 位相空間は現代の数学のありとあらゆる場面で現れるとても重要な概念です.

今回は主に, ユークリッド空間や距離空間において収束, 連続性, 連結性, 開集合/閉集合, コンパクト集合, 完備性といった基本的な概念やそれにまつわる性質を扱います. 時間があれば一般の位相空間の話題も触れようと思います.

予備知識は特に必要ありません. 導入される概念の定義をしっかりと理解し, 落ち着いて定義に沿った議論をすれば読み進められると思います.

(文責：渡辺 直希)

3 計算論 - 高橋正子

計算とは, 今日計算機と呼ばれている機械が普及する遥か昔, 1930 年代に数理論理学者たちによって考案された概念です. Gödel が不完全性定理を発表した 1931 年以降, 計算と呼ぶべき数学的対象の定義を試みる運動が起こりました. その結果として, そのような数学的対象のうち最も豊かな表現力を持つものは “同型を除いて” 一意であることが見出されました. そのような計算のことを現在の立場では Turing 完全と呼びます. この本で扱う計算 (計算可能関数 (再帰的関数), Turing マシン, 型なし λ 計算) はすべて Turing 完全であり, したがってこの本は Turing 完全性の性質について述べた本であるといえます.

この計算という概念が面白いのは, 計算によって解決できない問題 (決定不可能な問題) の存在が分かるからです. そのような問題の中で最も基本的なものは, 停止問題と呼ばれる以下の問題です.

> 計算機 M と, 入力 w の組 (M,w) が任意に与えられたとき, M に w を入力すると停止するかどうかを判定する計算機 (i.e. 停止するならば Yes と出力して停止し, そうでないならば No と出力して停止するような計算機) を作ることができるか？

この問題に対する答は否定的であり, このことを指して停止問題は決定不可能であると言います. セミナーでは主にこの問題が決定不可能であることの証明を追うことになるでしょう. 停止問題が決定不可能であることの証明は Turing マシンを用いれば直感的には簡明になります (例えば M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation の Part 2 参照) が, この本では証明に必要な関数を $\mathbb{N}$ 上の計算可能関数を用いてきちんと構成することにより示しています.

この本は 3 つの章からなります. 第 1 章では, まず計算可能関数と Turing マシンを導入したのち, 停止問題の決定不可能性とその周辺にある定理 (Rice の定理など) を示します. 第 2 章と第 3 章では, 型なし λ 計算に関する古典的な理論 (Church-Rosser 性, 正規化定理, Scott による意味論など) を展開します. この本では型については扱いませんが, 型なし λ 計算の簡約の理念を理解することは, 型つき λ 計算ひいては型理論に対する理解に繋がります. 型理論は現代の理論計算機科学の研究題材としても人気があり, 特に 2006 年に創始されたホモトピー型理論ではホモトピー群の計算に関する新たな知見が得られるなどの盛り上がりを見せています.

予備知識は必要ありませんが, 数学的議論にある程度なれていることが望ましいでしょう.

(文責：近藤滉将)

4　計算で身につくトポロジー - 阿原一志

この本のタイトルにあるトポロジーとは幾何学の分野の 1 つです．幾何学においては様々な図形を何かしらの基準の下で調べるということが多くなります．図形をゴムのように伸ばしたり縮めたりしても変わらないような性質を図形から取り出す，というのがトポロジーの基本的な考え方です．有名な例としてドーナツ (の表面) とコーヒーカップ (の表面) が挙げられます．これらは一方を曲げたり伸ばしたりして変形することで，もう一方へと形を変えることができますが，この変形において「穴が 1 つ」という性質は保たれています．このように，図形を連続的に変形させても変わらない性質のことを位相不変量といいます．2 つの図形の位相不変量が異なれば，それらは連続的な変形で移り合うことはないといえます．例えばドーナツは穴が 1 つあり，球は穴がないことから，ドーナツを連続的に変形することで球にすることはできないということを示すことができます．

この本は，このような位相不変量であるホモロジー群の入門書です．色々な図形のホモロジー群を自分の手で計算し，基礎的な定理を証明していくことで理論の面白さを体感できるように書かれています．

この本は 15 章からなり，1, 2 章では写像や群に関する基礎的な知識がまとめられています．3 章から 8 章では有向グラフの上でホモロジー群を定義し，豊富な具体例に触れつつその性質を調べていきます．また 9 章では完全系列というものを用いて，それまでに述べたホモロジー群の性質のいくつかを鮮やかに示していきます．そして 10 章以降では曲面のホモロジー群について述べ，それを応用して閉曲面の分類定理を取り扱います．

セミナーでは主に 9 章までの内容を扱い，余裕があれば 10 章以降の内容にも進んでいきたいと思います．この本を読むにあたっては，予備知識はほとんど必要ありません．一部行列を用いているところもありますが，必要に応じてチューターが補足するので問題ありません．

(文責：小林 晃一良)

5　応用微分方程式 - 小川卓克

$'$ (ダッシュ, プライム) は t による微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表すこととします．

物体の運動を表す運動方程式 (力) = (質量) · (加速度) のように，自然界の現象は微分方程式の形で説明されることが多いです．例えば，重力のみが働いている物体の運動を考えてみましょう．時刻 t における物体の高さを $x(t)$ と表すことにします (原点は適当に設定する)．物理学より，この物体に働く重力は重力加速度とよばれる定数 g を用いて $-mg$ と書けるので，運動方程式より $x''(t) = -g$ が成り立つことがわかります．このような式のことを微分方程式とよびます．この微分方程式は，初期条件 $x(0) = 0, x'(0) = 0$ (すなわち，時刻 $t = 0$ において位置も速度も 0 である) を設定すれば，この微分方程式は数学的操作 (t について二回積分する) により $x(t) = -\dfrac{g}{2}t^2$ と解くことができます．

自然現象を観察し，モデル (微分方程式) をつくり，それを解いて得られた解と現象と比較して，モデルを修正することの繰り返しが自然科学の基本的な流れです．例えば上の例であれば，解 $x(t) = -\dfrac{g}{2}t^2$ は時間がたつにつれて空気抵抗による影響が出ることで実際の落下現象からズレていくので，方程式に空気抵抗の項を増やして解き直す...... といったものです．数学ではこの「解く」という部分にスポットを当てます．

微分方程式は少し形が変わるだけで解の挙動が大きく変わります．

(1) $x'(t) = x(t), x(0) = 1$ の解は $x(t) = e^t$ のみである．

(2) $x'(t) = x(t)^2, x(0) = 1$ の解は $x(t) = \dfrac{1}{1-t} \quad (t < 1)$ のみである．$t < 1$ の範囲から外に出る解は存在しない．

(3) $x'(t) = 1 + x(t)^2, x(0) = 1$ の解は $x(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4})$ のみである．$-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ の範囲から外に出る解は存在しない.

(4) $x'(t)^2 = x(t), x(0) = 1$ の解は $x(t) = \frac{(t+1)^2}{4}$ や，$x(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq -1), \\ \frac{(t+1)^2}{4} & (t > -1) \end{cases}$，および $x(t) = \begin{cases} \frac{(t+5)^2}{4} & (t < -5), \\ 0 & (-5 \leqq t \leqq -1), \\ \frac{(t+1)^2}{4} & (t > -1) \end{cases}$ など無数にある.

(1) の解は無限の過去から無限の未来まで定義される解ですが, (2) や (3) はそうではありません．また, (1) から (3) は解がただ一つでしたが, (4) は解が無数にあります.

このセミナーの大きな目標は, 様々なタイプの具体的な微分方程式を解けるようになること, およびどのようなときに解が (適当な意味で) 存在してかつ一意であるかを見ることです.

高校で学ぶ微積分を予備知識として要求します．また, セミナー終盤で行列の知識 (サイズの小さい行列の行列式, 対角化など) を多少使いますが, これについてはチューターが補足しますので知らなくても問題ありませんが, 読みたいと思っている人は軽く事前に調べておくと楽かもしれません.

(文責：宿田 彩斗)

6 グレブナー基底と代数多様体入門 - D.A.Cox, J.Little, D.O'Shea

実数係数 1 変数多項式の世界で「割り算」ができることは皆さんご存知でしょう．例えば「$x^4 - 3x^2 + x - 1$ を $x^2 + x - 1$ で割ると, $x^2 - x - 1$ あまり $x - 2$」といった要領です．では, 変数が 2 つ以上になった場合はどうすればよいでしょうか？　簡単のため，ここでは変数が x, y の 2 つである場合を考えましょう．1 変数の場合に，「商」と「あまり」を一意に定めるカギとなっているのは, 多項式 (の各項) がその次数によって「順序付け」されていることです．これにならって, ここでは「x の次数が大きい方 $\to$ y の次数が大きい方」によって「順序付け」をすることにしましょう (他にも方法はあります)．すると, 少し非自明ですが,「$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ を $xy + x$ で割ると, $x + y - 1$ あまり $x^3 - x^2 + x + y^3$」というようにやはり「割り算」を (一意的に) 実行できます.

では, これの一般化として「2 つの多項式による割り算」を考えましょう．具体的には, 多項式 f, f_1, f_2 が与えられたときに, $f = q_1f_1 + q_2f_2 + r$ なる「良い感じ」の多項式 q_1, q_2, r を求めることを考えたいです．より詳細には, q_1, q_2 ではなく r に興味があります．しかし, これは一筋縄ではいきません．1 変数のときは $\gcd(f_1, f_2)$ で割っているのと同じことなので問題ないのですが, 2 変数では次のような問題が生じます (例はテキストより)：

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + y^2 &= (x + y)(xy - 1) + (y^2 - 1) + (x + y + 1) \\ &= x(xy - 1) + (x - 1)(y^2 - 1) + (2x + 1). \end{aligned}$$

すなわち,「良い感じ」の r は一般には一意に定まるとは限らないのです.

ここでは, そもそも f_1, f_2 を取り替えることで, 実際に r が一致するようにしてしまうことで対処しましょう．というのも, ここでの問題意識を踏まえると, f_1, f_2 そのものではなく集合 $\{h_1f_1 + h_2f_2 \mid h_1, h_2$ は任意の多項式 $\}$ のみが重要だからです．$(f_1, f_2) = (xy - 1, y^2 - 1)$ のとき, f_1 を $x - y$ に取り替えてもこの集合は不変であり, このとき「良い感じ」の r は $2y + 1$ に定まります．乱暴に述べれば, ここで取り替えた結果の $(f_1, f_2) = (x - y, y^2 - 1)$ がまさに**グレブナー基底**とよばれるもので, どのような状況 (変数の数や多項式の数) でもこのグレブナー基底への取り替え

が可能であることが知られています．グレブナー基底の応用は幅広く, 例えば (一般の次数の) 連立方程式を (ある意味で) 機械的に解けるようにしてしまうという驚くべき結果があります．そうした応用の多くは, あいにく手計算のうえでは依然として大変なままであまり役立ちませんが, コンピューターレベルの計算能力を前提とすると飛躍的な改善に結び付いており, 実際に広く活用されています．

セミナーでは, こうしたグレブナー基底の基本的な性質がまとめられた第 2 章に加えて, それらを足がかりに**代数幾何学**とよばれる一大分野の基礎を垣間見る第 4 章を軸に読もうと思います．上で触れた $\{h_1f_1 + h_2f_2\}$ の形の集合は, 一般に**イデアル**とよばれるものの一例となっています．この集合に属する多項式がすべて 0 となるような「点」たちは, (多項式の変数が n 個であるとき) n 次元空間における「図形」を表します．これを (アフィン) **代数多様体**とよびます．代数幾何学の根本的なモチベーションは, この「イデアル」という代数学的対象と, 「代数多様体」という幾何学的対象の間の対応を広く調べることと言ってよく, 実際に様々な面白い結果があります．

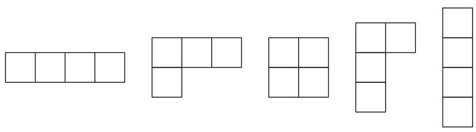
前提知識はほとんど不要です．多項式の計算や, 集合の基本的な取り扱いが不自由なくできればよいでしょう．筆致も丁寧で, 議論の飛躍も小さいです．ただし, 数学的に成熟した議論が多く現れるので (最終的に得られる結論は簡潔でも, その証明は入り組んでいるということもしばしばあります), そうした意味ではいわゆる数学書やそれに類する文章を多少なりとも読んだ経験があると安心でしょう．

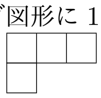
興味のある人は, まず「(可換) 環」「体」「イデアル」の定義だけでも調べてみましょう．さらに興味のある人は, 「ヒルベルトの基底定理」「ヒルベルトの零点定理 (Nullstellensatz)」について大まかに調べてみましょう．

(文責：平山 楓馬)

7　加群十話 - 堀田良之

正の整数 n に対し, n 次のヤング図形とは, n 個の正方形を各行の個数が広義単調減少になるように配置した図形です．たとえば 4 次のヤング図形は



の 5 種類です．さらにヤング図形に 1 から n までの整数を左から右, 上から下に大きくなるように書き込んだものを標準盤と呼びます．たとえば  の標準盤は

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

の 3 つです．数えてみると, 上で挙げた 5 種類の 4 次のヤング図形は, それぞれ 1 つ, 3 つ, 2 つ, 3 つ, 1 つの標準盤を持っていることがわかると思います．ちなみに, 標準盤の個数の二乗和は $24 = 4!$ です．

この本では, 「表現論」, 特に「対称群の表現論」と呼ばれる代数的な話題を扱います．n 次対称群とは, 1 から n の $n!$ 通りの並べ替えのことです．ベクトル空間であって, 対称群が「作用」しているものを対称群の表現と呼びます．表現を理解するためには, 既約表現という表現を分類することが重要です．たとえば整数は素因数分解により素数の積に分解できますが, 対称群の表現も既約表現に分解することができるためです．4 次の対称群の既約表現は全部で 5 種類あります．それぞれの次元は 1 次, 3 次, 2 次, 3 次, 1 次となります．先ほどのヤング図形の話と関連がありそうだと思いませんか？このように純代数的な話である表現論と, 組合せ論的な話であるヤング図形が密接に繋がっていることを紐解いていくことをこのセミナーの目標とします．

予備知識の説明をします．線形代数をメインで扱うので, 線形代数は行列の計算ができたり, 「基底」「表現行列」「固有値」などの言葉が理解できたりする程度に勉強しておいてください．また群, 環も頻出します．こちらは定義を知っている程度でも読めるとは思いますが, 「剰余群」「剰余環」などの概念を勉強することをおすすめします．

(文責：坂本平蔵)

8 Transcendental Numbers - M.R.R.Murty, P.Rath

π が超越数であるということは広く知られていると思いますが, 超越数とは何か, 超越数であることをどうやって示すのか, そしてそれが分かって何が嬉しいのかはあまり知られてないと思います．複素数 α が超越数であるとは任意の 0 でない有理数係数多項式の根にならない数であることを指します．例えば e, π, $\log 2$, $2^{\sqrt{2}}$ などは超越数であることが知られています．これの例から分かるように, 超越数論では積分や無限級数といった解析的に定義された値の超越性について興味がありますが, 超越数の定義を見ると有理数や多項式などといった離散的, 代数的な条件が与えられています．したがって, 超越数の問題について考えるためには解析的な考察と代数的, 整数論的な考察, すなわち複素解析や代数的整数論 (の初歩) が必要になってきます．つまり, 超越数論は複素解析と代数的整数論の交わる分野の一つであると言えるでしょう．

ある数が超越数であることを示すためには様々な定理が知られています．0 でない代数的数 α に対して e^{α} が超越数であることを主張する Lindemann の定理や, その一般化の Lindemann–Weierstrass の定理, Baker の定理, それとは別に非常に強力な Roth の定理などです．様々な定理が知られていますが, 強力な定理は基本的に複素解析と代数的整数論を土台として導かれています．そして, (effective な)Baker の定理や Roth の定理は整数論への強力な応用があることが知られています．例えば Roth の定理を用いれば $x^3 - 2y^3 = k$ といった Thue 方程式の整数解が高々有限個であることが示せたり, Baker の定理を使うことで $|x|$, $|y|$ の上からの評価を与えることもできます．他にも Baker の定理によって様々な不定方程式の解を上から抑えることが可能な上, 虚二次体の類数の評価や多項式関数の素因数の評価など, 応用は多岐にわたります．

本セミナーでは Liouville 数や e, π が超越数であるという基本的な定理から始まり, Lindemann–Weierstrass の定理や六指数定理, Schneider–Lang の定理といった強力な定理の証明を目指していきます．本書は短い章に分かれており, 各章は基本的に 1 つの命題の証明にのみ費やされているため, 読みやすい構成になっています．また, 最初の方は初等的だった論法に複素解析や代数的整数論などの技術を加えていくことでどんどん強い定理が示されるようになるのは興味深いと思います．複素解析と代数的整数論が超越数論という舞台で活躍する姿を楽しんでもらえたら幸いです．

ただし, ここまで述べてきたように本書に読むにあたって複素解析や代数的整数論の知識が必要になってきます．セミナーの予備知識として複素解析は仮定します．コーシーの積分定理や留数定理が分かっていれば十分ですが, 不等式評価もよく使うので慣れておくと楽に読めるかもしれません．代数学の知識はセミナーで扱う概念の基礎をなす線型代数について知っておいた方がよいでしょう．具体的には行列を用いて連立方程式が解けることを理解していたり, ベクトル空間の抽象的な定義を知っておくとよいです．行列の対角化などの知識は不要です．ガロア理論や代数的整数などの高度な話題はセミナー中にチューターが解説する予定なので不要ですが, 知っているとより楽しく読めるかもしれません．

(文責：新井 秀斗)