2023年度JMO夏季セミナー 本の紹介

数学オリンピック財団
JMO夏季セミナー実行委員会

今年度の夏季セミナーで扱う本は以下の8冊です.

1. 整数の分割 - G.E.Andrews, K.Eriksson
2. 対称性からの群論入門- M.A.Armstrong
3. ルベーグ積分30講 - 志賀浩二
4. 素数と2次体の整数論 - 青木昇
5. Computing the Continuous Discretely - M.Beck, S.Robins
6. 曲線と曲面の微分幾何 - 小林昭七
7. 楕円積分と楕円関数 - 武部尚志
8. A Course in Arithmetic - J.-P.Serre

このうち1冊を選び, 同じ本を選んだ数人の班員で**セミナー**を行います. 選んだ本について, 内容を分担して持ち回りで発表していきます. 夏季セミナーの最後には, 学んだことについてまとめて全体に発表します. それぞれの班には専属のチューター (数学オリンピックのOB/OG) が付き指導にあたるので, 安心してください.

セミナーで使う本はこちらで用意しますので, 事前に購入する必要はありません. 班分けは初日に行います.

次のページから, それぞれの本で扱う内容や前提知識などについて詳しく紹介していきます.

洋書を読むにあたって

5,8は洋書 (英語の本) です. 洋書の数学書というと, 専門用語ばかりでまったく分からないのではないかと思うかもしれませんが, 決してそんなことはありません. 基本的にすべての用語は必ず定義が述べられるので, 知らない用語が突然現れることは (予備知識として仮定されている場合を除いて) ありません. また, 文法構造も単純なものばかりですので, 基本的には中学校で習う程度の英語力で問題ありません. 難しいというよりも数学に独特の語法が多いですが, それもさほど多くのパターンがあるわけではないので, はじめは馴染めなくてもすぐに慣れてくるはずです. 洋書の専門書に触れる数少ない機会でもあると思うので, 恐れず積極的にチャレンジしてみるとよいでしょう.

洋書の選択を考えている人は, 英和辞典を持参するとよいかもしれません. 通常のものでもよいですが, 数学英和辞典があるとより便利でしょう. なお, 数学英和辞典はこちらでも何冊か用意して貸し出しますので, 新たに買う必要はありません.

「難易度の目安」について

本選びの参考として, それぞれの本に難易度の目安を掲載しました. ☆の数の意味は次の通りです：

- ☆ 数学書を読み慣れていない人にもおすすめの本.
- ☆☆ やや難しい内容にも挑戦してみたい人におすすめの本.
- ☆☆☆ 数学書に慣れている人, 発展的な内容を学んでみたい人におすすめの本.

もちろん, これらはあくまで目安です (最初は易しいが後半は高度な内容を含む, といったこともあります). そもそも, 様々な尺度が存在する本の難易度というものを厳密に三段階に分けることが無理を含んでいるのです. 夏季セミナー初日には, 担当のチューターによる本の紹介や実際に本を見てみる時間がありますので, そこで興味をもった本を選んでください (なお, 紹介文の執筆者が当日も同じ本の担当になるとは限りません).

1 整数の分割 - G.E.Andrews, K.Eriksson(著) 佐藤文広 (訳)

■難易度の目安 ☆

この本のテーマである「整数の分割」とは, 1 つの正の整数をいくつかの正の整数の和で表す方法のことです. 例えば, 4 は $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$ の 5 通りで表せます. これらが 4 の分割です.

このように, 整数の分割自体は単純な概念ですが, 実は面白い性質をたくさん持っています. 例えば簡単なものとして, Euler の恒等式「任意の正の整数 n について, n の奇数のみによる分割と, 相異なる数による分割の個数は等しい」などが挙げられます. このように, 「n の条件 A をみたす分割と条件 B をみたす分割の個数が等しい」という形をした主張を「分割恒等式」とよびます. この本ではまず, 「条件 A をみたす分割の集合」と「条件 B をみたす分割の集合」の間に一対一対応を作る全単射法や, Ferrer 図形と呼ばれる図形で整数の分割を表現し, その図形上の操作を考えることで等式を示す方法で, いくつもの分割恒等式が証明されます.

しかし, すべての分割恒等式がこのような初等的方法によって簡単に示されるわけではありません. そこで, 整数の分割をもっと分かりやすいものに置き換えることを考えます. 例えば, 6 以下の偶数と奇数とをそれぞれ 1 個ずつ含む分割をすべて求めたいと思ったとしましょう. それらの分割は, 次の多項式の積の中に自然に現れてきています.

$$
\begin{aligned}
&(q^2+q^4+q^6)(q+q^3+q^5)\\
&=q^{2+1}+q^{2+3}+q^{2+5}+q^{4+1}+q^{4+3}+q^{4+5}+q^{6+1}+q^{6+3}+q^{6+5}\\
&=q^3+2q^5+3q^7+2q^9+q^{11}
\end{aligned}
$$

これは非常に単純な例ですが, この考え方を拡張することで, 分割の情報を記憶させておく役目を果たすベキ級数である, 母関数というものが考えられます. これにより, 今まで組合せ論的対象だったものが, 級数の代数的操作に帰着することによって扱いやすくなります.

この本では, 母関数の手法と分割に関する考察を組み合わせることで, Gauss 多項式や Rogers-Ramanujan の恒等式など, 分割の理論の入門的な部分を学ぶことができます. さらに, 数学的な内容だけでなく, 過去の数学者たちによってどのような予想が立てられ, どのような試行錯誤が行われてきたのか, といった歴史的な部分にも触れることができるので, 味わい深い一冊となるでしょう.

この本を読むにあたって, 予備知識は特に仮定しません. 数学書を読み慣れていない人でも, パズルのように楽しく読み進めていけると思います.

(文責：石田 温也)

2　対称性からの群論入門 - M.A.Armstrong(著) 佐藤信哉 (訳)

■難易度の目安 ☆

唐突ですが，以下の 3 つの表を見比べて，気付くことはあるでしょうか？

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$\times$	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

1 つ目の表は mod 4 における加法，2 つ目の表は複素数における乗法，3 つ目の表は mod 5 における乗法を表していますが，これらは非常に似ているように見えます．それぞれの数が具体的に何であるかを無視してしまって，集合の各元がある（二項）演算によってどのように結び付けられるかという関係だけを追いかければ，これらは「完全に同じもの」と言ってしまってよいでしょう．こうした「同一視」の考え方こそが，抽象代数の根幹をなすものであり，上にあげた例のような「同一視」の方法を定式化することで今回扱う「群」の概念が得られます．

ある集合とその中で閉じている二項演算が，ある最低限の性質（具体的には，単位元の存在・逆元の存在・結合法則）をみたすとき，それは**群** (group) であるとよびます．上にも述べたとおり，群論で重要視するのは演算によって集合の各元がどのように結び付くかであり，各元が具体的にどのようなものであるかは重要ではありません．したがって，上にあげた整数や複素数などをはじめとする，いわゆる「数」にとどまらない，非常に幅広い対象を統一的に扱うことができます．類似の概念として「環」「体」「加群」「ベクトル空間」など様々なものが存在していますが（こうしたものを**代数系**とよびます），その中でも特に群は，わずか 3 つの基本的な性質からきわめて有用かつ多彩な結果を多く取り出せるため，そうした諸概念の根底に横たわるものとなっています．

こうした抽象論を，逆に具体的な設定のもとで適用することで有用な結果を得ることもできます．顕著な例のうち皆さんに馴染み深いものとして，初等整数論への応用があげられるでしょう．数学オリンピックでもお馴染みかもしれない「Fermat の小定理」や「Euler の定理」，あるいは「原始根の存在」などは，いずれも群のことばを通して解釈すると自然に理解され，見通しの良い証明を与えることが可能になるものたちです．

本書は比較的短い章をたくさん積み上げる形で構成されているため，とても読みやすいです．はじめは具体的な群についていくつか論じながら，しだいに抽象論へと移っていきます．今回のセミナーでは，有限群論において特に重要な結果の一つである **Sylow の定理**を大きな目標に据えることを予定していますが，時間が許せばその他の発展的なトピックも扱えるかもしれません．

本書を読むにあたって，予備知識は特に仮定しません．数学書を読んだ経験がなくても大丈夫です．なお，一部で小さな行列の演算を用いますが，本当に基本的なものなので，チューターによるその場の説明で十分だと思います（余力があれば，行列の積がどのように定義されるかを事前に調べておくとよいかもしれません）．

高校までの数学を超えた，専門的な数学の世界をはじめて垣間見てみたいという人におすすめです．

(文責：平山 楓馬)

3　ルベーグ積分 30 講 - 志賀浩二

■難易度の目安 ☆☆

図形 (平面上の点の集合) が与えられたとき, その大きさを調べる指標の 1 つになるのが「面積」です．初等幾何で登場する図形については, 「円の面積＝半径×半径×円周率」のように定めてきましたが, 一般の図形に対しては, 図形ごとの特別な性質によらない面積の定め方を考えなければなりません.

高校で習う積分 (リーマン積分といいます) はその解決法の 1 つとなっていて, 連続関数のグラフに囲まれた図形の面積を定めることができます. しかし, リーマン積分は「図形を軸に垂直な無数の直線で分割する」という発想で計算するため, 限られた図形の面積しか求めることができません. 例えば,

$$\{(x,y) \mid x \text{ と } y \text{ は 0 以上 1 以下の有理数 }\}$$

という点集合を考えると, この方法で面積を定める困難さが感じられると思います.

ものの量を測る最も単純な方法は, 「1 つ, 2 つ, ……」と数えることなのですが, 図形上に点は無限に存在するため, この方法は使えません (例えば, 1 辺 1 の正方形上の点と 1 辺 2 の正方形上の点が相似拡大により 1 対 1 対応してしまいます). ここで, 面積とはどのようなものだったかに立ち返ってみましょう. 「1 辺 1 の正方形の面積は 1」や, 「2 つの図形の重ならない和集合の面積はもとの面積の和となる」や, 「図形を平行移動したときに面積は変わらない」といった性質を持っていることが期待され, 実際, そのような性質が成り立つように, 長方形, 三角形の面積を順に定めていったわけです. これを上手に一般化すると「ルベーグ測度」という概念に到着し, 上で挙げた例をも含む様々な図形の面積を定めることが可能になります.

また, このルベーグ測度を用いてリーマン積分の拡張となっているルベーグ積分を定義することができます. ルベーグ積分の 1 つの大きな成果は, 関数列の積分と極限の交換

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

が出来るためのかなり簡単な条件を与えたことです. こういった操作の正当化は大学以降の数学や物理で頻繁に必要になり, ルベーグ積分は現代の解析学の基礎となっています.

ルベーグ測度・ルベーグ積分の導入には無限の概念と数学的にきちんと向き合うことが必要になり, 形式的でとっつきにくい入門書が多いですが, その中でも本書は例や直観的な説明を多く入れて形式的な論理に終始することを避けており, 初学者にやさしいものになっています. ただし, やはりルベーグ積分は形式的な性格が強いため, 数学の証明を読み書きすることにはある程度慣れていることが望ましいです. また同時に, この本を選ぶ場合は (高校数学程度の) 極限の記号や操作には慣れていた方が良いでしょう.

(文責：星野 泰佑)

4　素数と 2 次体の整数論 - 青木昇

■難易度の目安 ☆☆

「n を 3 以上の整数とするとき, $x^n + y^n = z^n$ をみたす正の整数の組 (x,y,z) は存在しない. 」

これは, フェルマーの最終定理という有名な定理です. 一般に, 方程式の整数解を考えるとき, 素因数を調べるのは有効なテクニックの 1 つですが, これを用いる際には式をできるだけ因数分解した形にしておくと考えやすいです. そこで複素数の範囲で考えると, 例えば $n=3$ の場合なら上の式は $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を用いて

$$(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = z^3$$

と因数分解できます. このとき方程式の係数は, もともと有理数の範囲に収まっていたのが因数分解により $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \{a+b\sqrt{-3} \mid a,b \text{ は有理数 }\}$ (これは 2 次体とよばれるものの 1 つです) の範囲まで広がりますが, それに対応して, 整数の世界を拡張した「2 次体の整数」 (一般には「代数的整数」) の世界で素因数を調べるという方法をとります. 具体的には, 上の例なら $\mathbb{Z}[\omega] = \{a+b\omega \mid a,b \text{ は整数 }\}$ 上で考えます.

2 次体の整数の世界でも, 普通の整数と同様に加減乗の演算, 割り切る・割り切れるの関係, 素数の概念などが定義できますが, 普通の整数の世界なら成り立つ「素因数分解の一意性」が一般には成り立たなくなってしまいます

(これがフェルマーの最終定理の難しいところの 1 つにもなっています). そこで登場するのがイデアルの概念です. イデアルとは, 数の代わりにその数の倍数全体を考えるという考え方で数の概念を拡張したものです. イデアルの世界で素数に対応するのが素イデアルで, イデアルの世界では素イデアル分解の一意性が成り立ちます. イデアルを考えることにより 2 次体の整数, 特に素因数分解に関して詳しく調べることができるようになります.

本書では, 2 次体の整数の導入や, どのような場合に素因数分解の一意性が成り立つかについて述べられた後, 応用としてフェルマーの最終定理の $n = 3, 4$ の場合や, 「任意の 4 で割って 1 余る素数は 2 個の平方数の和で表せる」というフェルマーの 2 平方和定理が示されており, セミナーの大きな目標となるでしょう. 余裕があれば素イデアル分解の一意性のところまで進めるとさらに代数的整数論の面白さが分かると思います.

2 次体の整数論を勉強するのに必要な初等整数論も前半で詳しく解説されており, 少し用いられている群や環の知識も付録にまとめられているので, 予備知識は不要です. 整数論に興味のある皆さんをお待ちしております.

(文責：小林 晃一良)

5 Computing the Continuous Discretely - M.Beck, S.Robins

■難易度の目安 ☆☆

皆さんは Ehrhart (エルハート) 理論という言葉を耳にしたことはあるでしょうか. Ehrhart 理論は, 頂点の座標がすべて整数である凸多面体 (本書では整数多面体と呼ぶ) に含まれる格子点 (座標がすべて整数である点) の数え上げに関連する理論で, 以下の Ehrhart の定理が最も有名です：

> d 次の多面体 $\mathcal{P}$ と正の整数 t に対して, $L_{\mathcal{P}}(t) = t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ とする. つまり, $\mathcal{P}$ を t 倍した多面体 $t\mathcal{P} = \{(tx_1, tx_2, \ldots, tx_d) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathcal{P}\}$ に含まれる格子点の個数を $L_{\mathcal{P}}(t)$ で表す.
>
> このとき, $\mathcal{P}$ が整数多面体ならば $L_{\mathcal{P}}(t)$ は t に関する次数 d の多項式となる.

この定理は 1962 年に Eugène Ehrhart によって示されました. 当時の Ehrhart は高校教師をしており, この定理の証明も初等的で, 中高生にも理解できるものになっています.

本書の邦訳（訳：岡本吉央）のタイトルは「離散体積計算による組合せ数学入門」となっていますが, 離散体積とは $L_{\mathcal{P}}(t)$ のことであり, Ehrhart 理論は中心的な役割を果たします. 本書では比較的簡単な例を用いて離散幾何学についての直感を養うとともに母関数などの基礎的な概念を導入したのち, Ehrhart 理論を紹介します. Ehrhart の定理に加えて, $\mathcal{P}$ が有理多面体 (頂点の座標がすべて有理数である凸多面体) であるときに $L_{\mathcal{P}}(t)$ が t に関する次数 d の準多項式となることと, その準多項式についての相互法則と呼ばれる重要な結果が示されています. その後, Ehrhart 理論のさまざまな応用が述べられています.

ここでは, 数え上げへの応用において, Ehrhart 理論がどのように威力を発揮するのかを少しだけ紹介したいと思います. 何らかの組合せ的対象の集合の列 $A_1, A_2, \ldots$ について, その個数の列 $\#A_1, \#A_2, \ldots$ が知りたいとします. 今, $\#A_t = L_{\mathcal{P}}(t)$ となる d 次整数多面体 $\mathcal{P}$ が構成できたとします. このとき, Ehrhart の定理により $\#A_t$ は t に関する次数 d の多項式となるので, $\#A_1, \#A_2, \ldots, \#A_{d+1}$ を計算することで $\#A_t$ の一般式を得ることができます. 準多項式の定義についてはここでは述べませんが, $\mathcal{P}$ が有理多面体であるときにも同様のことができます.

セミナーにおいては, Ehrhart の定理及び相互法則の証明が最初の目標となるでしょう. 余裕があれば 6 章の魔法陣の数え上げについての章も読めるかもしれません. 興味や進捗によってはより発展的な応用が述べられている第 II 部を読むことも可能です. 本書を読む上で必要な予備知識は特にありません. 演習問題が豊富にあるため理解を深めながら読み進めることができると思いますが, 証明が演習に回されている箇所もあるため, 読み進めるには胆力が必要かもしれません.

(文責：井上 卓哉)

6　曲線と曲面の微分幾何 - 小林昭七

■難易度の目安 ☆☆☆

空間内にある曲線や曲面について, その各点での「曲がり具合」を測るにはどうすればよいでしょうか. 例えば, 半径 1 の円と半径 2 の円を比べると, 半径が短い円の方がよりカーブがきついため, 局所的な「曲がり具合」は半径 1 の円の方が大きいと言えます. このように, 同じ円という図形でも「曲がり具合」は異なるので, 「曲がり具合」をきちんと定義するには「長さ」の概念が必要だろうということが分かります. 曲がった曲線の「長さ」を測るにはどうすればよいかというと, 各点での接ベクトル (接線方向のベクトル) の長さを定めて積分すればよい, というふうに考えることができます. このように, 各点での接ベクトルに対して「長さ」が定まっているような図形 (曲線, 曲面) を調べる学問が微分幾何です. この接ベクトルの「長さ」を用いて, 曲線や曲面の局所的な「曲がり具合」(数学用語では曲率といいます）を実数として定義することができるのです.

曲率に関する微分幾何の重要定理として, Gauss-Bonnet の定理というものがあります. この定理の主張は, 大雑把に述べると「曲率を曲面で積分すると, その曲面のオイラー数を 2π 倍した数になる」というものです. このオイラー数というのは, 曲面をぐにゃぐにゃに変形させても変わらない位相幾何的な数で, 曲率などの微分幾何的な情報とは関係なく定義されるものです. 多面体を例にとって考えてみましょう. 各頂点での「曲がり具合」（とがり具合）として, $2\pi -$ (その頂点に集まる角度（弧度法）の和) という量を考え, これをすべての頂点について足し合わせてみてください. 例えば正多面体でやってみましょう. 4π になるはずです. これは, 球面と同じ形状を持つ（柔らかい素材でできていると思えば球面に変形できる）多面体ならいつでも 4π になります. この 4π は球面のオイラー数 2 を 2π 倍して得られる数なのです（実はこの事実はオイラーの多面体定理そのものです）.

本書は 5 章からなり, 1, 2, 3 章では豊富な具体例に触れつつ曲線, 曲面の微分幾何的な枠組み（接ベクトルの「長さ」の概念）の導入, 曲率の定義, 計算などを行います. そして 4 章で Gauss-Bonnet の定理を扱います. ここまで進むことを目指したいと思いますが, 前半の方で具体例なども丁寧にやると 4 章まで進めないかもしれません.

予備知識としては, 高校で学ぶ微分積分および行列（特に 2 次正方行列の行列式, 固有値など）について知っていることを要求します.

(文責：黒田 直樹)

7　楕円積分と楕円関数 - 武部尚志

■難易度の目安 ☆☆☆

「**楕円積分**」や「**楕円関数**」という言葉を初めて聞いてその定義を正しくイメージできる人は少ないと思います. 楕円の周の長さを積分を使って求めようとすると 4 次式の平方根の積分が出てきますが, これが楕円積分です. 楕円積分は一般に, 平方因子をもたない 3 次または 4 次の多項式 $\varphi(x)$ に対して, x と $\sqrt{\varphi(x)}$ の有理関数の積分として定義されます. 一方, 楕円関数は楕円積分の逆関数として定義されます.

楕円関数の具体例として, $u(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ の逆関数として定義される**ヤコビの楕円関数** $\mathrm{sn}(u)$ というものがあります. $k \to 0$ の極限をとると $\sin(u)$ となることから期待されるように, $\mathrm{sn}(u)$ は三角関数に似た性質をもち, 例として加法定理をもつことや周期性をもつことが挙げられます. さらに驚くことに, $k \neq 0$ のときは $\mathrm{sn}(u)$ は 2 つの ($\mathbb{R}$ 上独立な) 周期をもちます.

2 つの周期をもつという性質は楕円関数一般で成り立つものであり, 一般的にはこちらが楕円関数の定義として採用されます. そのほか楕円関数がもつ著しい性質としては, 任意の楕円関数が**テータ関数**を用いて「因数分解」できることや,「加法定理」をもつ有理型関数が有理関数, 指数関数の有理関数, 楕円関数の 3 つに限られることなどがあります.

今回のセミナーでは楕円積分について調べることで, 楕円関数が 2 つの周期をもつことを理解することを目標とします (証明には第 11, 12 章で述べられるアーベル-ヤコビの定理を使いますが, 今回のセミナーでは扱いませ

ん)．前提知識としては複素積分についての基本的な知識があることが望ましいです．リーマン面などの考え方が登場しますが，具体的な関数に対してのみ扱うため，一般論については知らなくても問題ありません．

(文責：三宮 春香)

8 A Course in Arithmetic - Jean-Pierre Serre

■難易度の目安 ☆☆☆

下 4 桁が 2023 であるような素数は存在するでしょうか．また, 存在するなら有限個でしょうか, 無限個でしょうか．では, 下 100 桁がすべて 1 であるような素数についてはどうでしょう．

これらは愚直に考えてもよくわからないと思いますが, 次の「Dirichlet の算術級数定理」を知っていると, どちらも無数に存在することが即座にわかります：

> a, b を互いに素な正の整数とする．このとき, ある整数 n を用いて $p = an + b$ と表せる素数 p は無数に存在する．

この定理の主張の a, b には互いに素という条件しかついておらず, とても強力な定理と言えるでしょう．今回のセミナーでは, この Dirichlet の算術級数定理を証明することを目標とします．

本書は整数論の本で, 整数論の代数的な取扱いについても, 解析的な取扱いについても触れています．そのうち, この Dirichlet の算術級数定理は解析的な手法を用いて示されます．証明の核となるのは, ζ 関数や L 関数と呼ばれる複素関数です．ζ 関数は実部が 1 より大きい複素数 s に対して $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ と定義される関数で, 有名な未解決問題であるリーマン予想にも登場する関数です．定義を見るだけだと素数の話と無関係のようですが, これは $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p:\text{ 素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$ と変形でき, こう見ると素数の話に関係することがわかると思います．この ζ 関数や L 関数の収束を議論したり値を評価したりすることで, Dirichlet の算術級数定理が証明できてしまうのです．解析的に整数論にアプローチするという, 高校までで習う整数論とは全く違う新鮮な感覚を味わえることでしょう．

次に, 今回のセミナーで必要な予備知識を説明します．今回読む部分は, 複素数や関数の無限和・無限積を多数扱います．そのため, 無限和・無限積の収束や絶対収束の定義, 順序交換の十分条件について知っていることを要求します．また, 級数を積分するなどの変形もしばしば行うので, 関数の無限和と積分の交換ができる十分条件である（広義）一様収束について, 定義とチェックの仕方を勉強してくるとよいでしょう．ここまでは, たとえば野口潤次郎「複素解析概論」の 2.6 節までなどで勉強できます．また, 扱う関数は複素関数のため, 「正則」「極」などの基本的な言葉の定義や, $e^z, \log z$ の基本的な性質について調べてくると望ましいです．

(文責：坂本 平蔵)