問題コーナー

第 45 回

岸川 滉央

C

2011年 4月10日出題
5月10日締切
6月 7日解説

$\{a_i\}$ は正の整数の無限列である $(i=0,1,2,\ldots)$. ある実数 s が存在し, 任意の正の整数 i について $0 < a_i - a_{i-1} \leq s$ が成り立つ.

このとき, 任意の正の整数 n に対して, a_i の相異なる n 個の要素で等差数列を作れることを示せ.

解説

こんにちは, 出題者の岸川です.

今回の問題には 2 人から解答があり, うち 2 人が正解でした. ご応募ありがとうございました.

今回の問題は等差数列をテーマとした問題でした. 単に n や s に関して帰納法をしてみてもうまくいかず, 苦しんだ人もいるのではないでしょうか. 私の用意した解答は,

> 平面の格子点を 2 色で塗り分けたとき, $n \times n$ の正方形が全て同色であるならば, 直線状に $n+1$ 個の同色の点が等間隔に並ぶ.

という五目並べっぽい発想をもとにできたものです. では解説に移ります.

◦○◯ 解答例

まず, 補題に用いるものを定義する.

$$(1,n)A_1 + (1,n)A_2 + \ldots + (1,n)A_K$$

という表記は A_t の係数が 1 以上 n 以下の正の整数であるような n^K 個の値の集合とする $(t=1,2,\ldots,K)$.

(たとえば $(1,2)A_1 + (1,2)A_2$ は $\begin{pmatrix} A_1+A_2 & 2A_1+A_2 \\ A_1+2A_2 & 2A_1+2A_2 \end{pmatrix}$ を意味する.)

(補題) 任意の正の整数 n, k, s に対して, ある K が存在し,

$$\alpha + (1,n)A_1 + (1,n)A_2 + \ldots + (1,n)A_K$$

をどのように s 色で塗り分けても,

$$\beta+(1,n)B_1+(1,n)B_2+\ldots+(1,n)B_K$$

が全て同色で塗られているような β, B_1, B_2, ..., B_K が存在することを示せ.

(ただし, B は A の 1 つ以上の和であり, 重複しないものとする. また, この際 A の係数は 1 とする. β は定数項. たとえば, $B_1=A_1$, $B_2=A_2+A_3$ は可. $B_1=A_1+A_2$, $B_2=A_2+A_3$ は A_2 が重複しているため不可.)

(たとえば $n=2,k=1,s=2$ のとき $K=2$ である.

$$\begin{pmatrix} A_1+A_2\leftarrow\text{赤} & 2A_1+A_2\leftarrow\text{青} \\ A_1+2A_2\leftarrow\text{青} & 2A_1+2A_2\leftarrow\text{赤} \end{pmatrix}$$

のように色を塗ったとすると, $\beta=0$, $B_1=A_1+A_2$ とすることで $\beta+(1,2)B_1$ は全て赤になる.

$$\begin{pmatrix} A_1+A_2\leftarrow\text{赤} & 2A_1+A_2\leftarrow\text{赤} \\ A_1+2A_2\leftarrow\text{青} & 2A_1+2A_2\leftarrow\text{青} \end{pmatrix}$$

のように色を塗ったとすると, $\beta=2A_1$, $B_1=A_2$ とすることで $\beta+(1,2)B_1$ は全て青になる. 他の塗り分け方についてもこのような β, B_1 の取り方が存在する)

(補題証)

$n=1$ のとき　任意の正の整数 k, s で成立するのは自明. ($(1,n)A_1+(1,n)A_2+\ldots+(1,n)A_K$ が 1 つの値しかもたないため色の塗り分けが行われない. よって, $K=k$ とし, $B_i=A_i$, $\beta=0$ とするとよい.($i=1,2,\ldots,k$))

$n=n'$ のとき　任意の正の整数 k, s で成立すると仮定する.

$n=n'+1$, 　$k=1, s=1$ ならば成立するのは自明. (色が 1 種類のみより塗り分けが行われないため, $K=1$, $B_1=A_1$ とするとよい.)

$n=n'+1, k=1, s=s'$ のときに成立すると仮定する.

帰納法の仮定より $n=n'+1, k=1, s=s'$ のとき $K=K'$,

$n=n', k=K'+1, s=s'+1$ のとき $K=K''$ とおける.

$n=n'+1, k=1, s=s'+1$ のとき $K=K''$ で成立することを示す. $\alpha+(1,n'+1)A_1+(1,n'+1)A_2+\ldots+(1,n'+1)A_{K''}$ を $s'+1$ 色で塗り分ける.

このとき, $\alpha+(1,n')A_1+(1,n')A_2+\ldots+(1,n')A_{K''}$ も $s'+1$ 色で塗り分けら

れる.

よって, 帰納法の仮定より $\beta+(1,n')B_1+(1,n')B_2+...+(1,n')B_{K'+1}$ が同色で塗られているような $\beta, B_1, B_2, ..., B_{K'+1}$ が存在する. この色を S とする.

(このとき, $\beta+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+...+(1,n'+1)B_{K'+1}$ は

$\alpha+(1,n'+1)A_1+(1,n'+1)A_2+...+(1,n'+1)A_{K'}$ に含まれることに注意する.)

ここで $\beta+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+...+(1,n'+1)B_{K'}+(n'+1)B_{K'+1}$ に注目する.

(1) この中で S で塗られているものが存在したとき

それを $\beta+b_1B_1+b_2B_2+...+b_{K'}B_{K'}+b_{K'+1}B_{K'+1}$ とする. ($b_{K'+1}=n'+1$ に注意) ここで C_1 を $b_i=n'+1$ であるような i に関して B_i を足し合わせたものとし, γ はそれ以外の項を足し合わせたものとすると, $\gamma+(1,n')C_1$ は $\beta+(1,n')B_1+(1,n')B_2+...+(1,n')B_{K'+1}$ に含まれ, また,$\gamma+(n'+1)C_1=\beta+b_1B_1+b_2B_2+...+b_{K'}B_{K'}+b_{K'+1}B_{K'+1}$ であるため,

$\gamma+(1,n'+1)C_1$ は同色で塗られている. よって成立する.

(2) $\beta+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+...+(1,n'+1)B_{K'}+(n'+1)B_{K'+1}$ が全て S で塗られていないとき

$\beta+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+...+(1,n'+1)B_{K'}+(n'+1)B_{K'+1}$ は S を除く s' 色で塗られている. 帰納法の仮定より $\gamma+(1,n'+1)C_1$ を満たす γ, C_1 が存在する. よって成立する.

よって, $n=n'+1,k=1$ のとき 任意の正の整数 s で成立する.

$n=n'+1,k=k'$ のとき 任意の正の整数 s で成立すると仮定する.

帰納法の仮定より $n=n'+1,k=k',s=s'$ のとき $K=K'$,

$n=n'+1,k=1,s=s'^{(n'+1)^{K'}}$ のとき $K=K''$ とおける.

$n=n',k=k'+1,s=s'$ のとき $K=K'+K''$ で成立することを示す. $\alpha+(1,n'+1)A_1+(1,n'+1)A_2+...+(1,n'+1)A_{K'+K''}$ に関して, $A_{K'+1}, A_{K'+2}, ..., A_{K'+K''}$ の係数を定めた際の値の集合は $(n'+1)^{K'}$ 個の要素をもち, それらの s' 色での塗り分け方は $s'^{(n'+1)^{K'}}$ 通りある. その塗り分け方の 1 通りを 1 つの色に対応させて考える.

(たとえば,

$$\begin{pmatrix} A_1+A_2+A_3 \leftarrow \text{赤} & 2A_1+A_2+A_3 \leftarrow \text{青} \\ A_1+2A_2+A_3 \leftarrow \text{青} & 2A_1+2A_2+A_3 \leftarrow \text{赤} \\ A_1+A_2+2A_3 \leftarrow \text{赤} & 2A_1+A_2+2A_3 \leftarrow \text{赤} \\ A_1+2A_2+2A_3 \leftarrow \text{青} & 2A_1+2A_2+2A_3 \leftarrow \text{青} \end{pmatrix}$$

のように塗り分けたとき

A_3 の色は $\begin{pmatrix} \text{赤} & \text{青} \\ \text{青} & \text{赤} \end{pmatrix}$, $2A_3$ の色は $\begin{pmatrix} \text{赤} & \text{赤} \\ \text{青} & \text{青} \end{pmatrix}$, と考えることができ, $(1,2)A_3$ を 2^{2^2} 色で塗り分けたのと同値である.)

そのようにすると元の塗り分けは,

$(1,n'+1)A_{K'+1}+(1,n'+1)A_{K'+2}+\ldots+(1,n'+1)A_{K'+K''}$ を ${s'}^{(n'+1)^{K'}}$ 色で塗り分けたのと同値であるため,

帰納法の仮定より $\beta+(1,n'+1)B_{k'+1}$ が同色であるような β, B_1 が存在する.

これは任意の $(a_1,a_2,\ldots,a_{K'})$ について (a_i は 1 以上 $n'+1$ 以下の正の整数), $\alpha+a_1A_1+a_2A_2+\ldots+a_{K'}A_{K'}+\beta+(1,n'+1)B_{k'+1}$ が同色であることを意味する. 特に $\alpha+(1,n'+1)A_1+(1,n'+1)A_2+\ldots+(1,n'+1)A_{K'}+\beta+B_{k'+1}$ について考えると, 帰納法の仮定より $\gamma+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+\ldots+(1,n'+1)B_{k'}+\beta+B_{k'+1}$ が同色になるような γ, B_1, B_2, ..., $B_{k'}$ が存在する.

よって, $\beta+\gamma+(1,n'+1)B_1+(1,n'+1)B_2+\ldots+(1,n'+1)B_{k'}+(1,n'+1)B_{k'+1}$ は同色である. よって成立する.

よって, $n=n'+1$ のとき 任意の正の整数 k, s で成立する.

よって, 任意の正の整数 n, k, s で成立する. よって示された. (補題終)

これより元の問題を示す.

s はそれより大きい正の整数に置き換えても問題ないため, s は正の整数としてよい.

ここで, $\{a_i\}$ のすべての要素を S_0 で塗る.

$\{a_i+h\}$ の要素のうち S_0, S_1, ..., S_{h-1} で塗られていないものを S_h で塗る $(h=1,2,\ldots,s-1)$.

これによって a_1 以上の全ての正の整数を s 色で塗り分けることができる.

補題において $k=1$ のときを考える. $\alpha=a_1, A_1=A_2=\ldots=A_K=1$ とすると,

$\alpha+(1,n)A_1+(1,n)A_2+\ldots+(1,n)A_K$ の要素は全て a_1 以上の正の整数であるため, s 色で塗り分けられている.

よって, $\beta+(1,n)B_1$ が全て同色であるような β, B_1 が存在する (B_1 は A の 1 つ以上の和であるため正の整数である).

この色を S_h とすると, $\beta-h+(1,n)B_1$ の要素は全て $\{a_i\}$ に含まれており, 公差が 0 でない長さが n の等差数列をなしている. よって示された. (証明終)

なお, 投稿された解答は

ファン・デル・ヴェルデンの定理

任意の自然数 r, k に対して, 以下の条件をみたす自然数 $W(r,k)$ が存在する.
条件：連続する $W(r,k)$ 個の自然数を r 色で色分けしたときどのように色分けしても同色で長さが k の等差数列が存在する.

を用いたものと

セメレディーの定理

$0<\delta<1$ である実数 δ を任意に選んで固定する. 密度が δ 以上である $[N]$ の部分集合について考える. このとき, δ と与えられた整数 $k\geq 3$ に対し, δ と k に応じて定まる正の整数 $N(\delta,k)$ があって, 次が成り立つ.
$N\geq N(\delta,k)$ ならば, 密度が δ 以上である $[N]$ の部分集合には, 長さ k の等差数列が必ず含まれる.

を用いたものでした.

感想欄より

高校時代に読んだ「数論の三つの真珠」にファン・デル・ヴェルデンの定理が載っていてうろ覚えだったのですが, よく考えたらそれを使って解けました.

私はこの問題を思いついてから解くまで 1 週間ほど必死に悩んだので, 他定理から自明に示されると聞くと少しショックです.

難問でした. 問題文を一読して,Tao によるフィールズ賞受賞論文を思い出しました. 今回の問題は,「密度」の最小値が存在するタイプで, 成立は明らかでしたが, 直接的に示せず, 悔しく思います. ただ, 非常に美しい主張で, 解説が楽しみです.

用意した解答が期待に添えているとうれしいです.

(きしかわ あきお
東京大学理科三類 1 年)