問題コーナー

第 38 回

保坂 和宏

C

2010 年 09 月 10 日出題
10 月 10 日締切
11 月 7 日解説

n を正の整数とする. xy 平面上の n^2 個の点 (i, j) (i, j は 1 以上 n 以下の整数) を考え, これらの点のうちいくつかに石を置く. 以下の条件をみたさなければならないとき, 石を置ける点の個数の最大値を求めよ.

条件： 同一直線上にないどの 4 個の石も,「良い等脚台形」の 4 頂点とはならない. ここで,「良い等脚台形」とは,「等脚台形 (長方形を含む) であって, その平行な 2 辺が x 軸または y 軸に平行であるもの」とする.

解説

こんにちは, 第 38 回問題コーナー担当の保坂です.

今回の問題は, 条件をみたすように石を最大でいくつ置けるかという問題で, 試行錯誤しながら答えに至ったという方も多いのではないでしょうか.

6 人の方から解答をいただきました, ありがとうございます. 1 人の方が正解でした. また, 答えの値が正しく, 着目点も適切だった方を準正解とさせていただきました.

答えの値, すなわち石を置ける点の個数の最大値は $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ となります. ただし, $[x]$ は x 以下の最大の整数を表し, n が奇数のとき $\dfrac{5n-3}{2}$ 個, n が偶数のとき $\dfrac{5n-4}{2}$ 個となります. これが実際に最大値になっていることを示すには,

- 条件をみたすとき, 石が置かれる点の個数は $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ 以下であること
- 条件をみたすように $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ 個の点に石を置けること

の 2 つを示す必要があります. これらを順に見ていきましょう.

◦○○ 解答例：上からの評価

条件をみたすとき, 石が置かれる点の個数は $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ 以下であることを示す.

$n=1$ のとき, 1 以下であることは明らかである. 以降 $n \geqq 2$ のときを考える.

異なる 4 点 (x_{11},y_1), (x_{12},y_1), (x_{21},y_2), (x_{22},y_2) (ただし $y_1 \neq y_2$) を考えると, この 4 点が「良い等脚台形」の 4 頂点となるための必要十分条件は $x_{11}+x_{12}=x_{21}+x_{22}$ である. よって, 各 y 座標について, 集合

$$S_y=\{x_1+x_2 \mid \text{異なる 2 点 } (x_1,y),(x_2,y) \text{ に石が置かれている }\}$$

を考えると, 条件をみたす石の置き方に対して, $S_1,S_2,\ldots,S_n$ はどの 2 つも共通部分をもたない. S_y の各元は $1+2=3$ 以上 $(n-1)+n=2n-1$ 以下であるから, $S_1,S_2,\ldots,S_n$ の元の個数の和は $2n-3$ 以下である.

y 座標が y である点のうち石が置かれている点の個数を a_y とすると, S_y の元の個数は, $a_y \leqq 1$ のとき 0 個, $a_y \geqq 2$ のとき $2a_y-3$ 個以上となる. これは, $a_y \geqq 2$ のときは, 石が置かれている点の x 座標を $x_1<x_2<\cdots<x_{a_y}$ とすると, 少なくとも $x_1+x_2<x_1+x_3<x_2+x_3<x_2+x_4<x_3+x_4<x_3+x_5<\cdots<x_{a_y-2}+x_{a_y}<x_{a_y-1}+x_{a_y}$ が S_y に含まれることからわかる.

以上より, $a_y=i$ となる y の個数を b_i とし, 石が置かれている点の個数を m とすると,

$$\sum_{i=0}^{n} b_i=b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n=n$$

$$\sum_{i=0}^{n} ib_i=b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n=m$$

$$\sum_{i=2}^{n}(2i-3)b_i=b_2+3b_3+5b_4+\cdots+(2n-3)b_n \leqq 2n-3$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}(2i-3)b_i&=2\sum_{i=2}^{n} ib_i-3\sum_{i=2}^{n} b_i\\&=2(m-b_1)-3(n-b_0-b_1)=2m-3n+3b_0+b_1\end{aligned}$$

であるから,

$$m \leqq \frac{(2n-3)+3n-3b_0-b_1}{2} \leqq \frac{5n-3}{2}$$

が得られる. m は整数であるから, $m \leqq \left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ が示された.

この解答のメインアイデアは,「良い等脚台形」を「平行な 2 辺上の 2 頂点の垂直二等分線 (x 軸または y 軸に平行) が一致する」という特徴づけをして考え, 垂直二等分線として考えられる y 軸に平行な直線は $x=\dfrac{3}{2},2,\dfrac{5}{2},3,\dots,n-1,\dfrac{2n-1}{2}$ の $2n-3$ 本のみであることに注目するところです. 解答中では正確に書くために S_y を定義しましたが, S_y は y 座標 y での垂直二等分線の x 座標の 2 倍の集合となっています.

その後, 同じ y 座標の点たちによって垂直二等分線がいくつできるかを考えますが, これらの中では同じ垂直二等分線があっても良いので, 単純に ${}_{a_y}\mathrm{C}_2=\dfrac{a_y(a_y-1)}{2}$ とはできず, 少なくとも $2a_y-3$ 以上という評価を利用することになります.

さて, $m \leqq \left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ を示すのに, x 軸に平行な 2 辺をもつ「良い等脚台形」のみを考えていましたが, この方針に沿って実例を構成しようとすれば, 自然とうまくいきます.

◦○○◯ 解答例：実例構成

条件をみたすように $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ 個の点に石を置けることを示す.

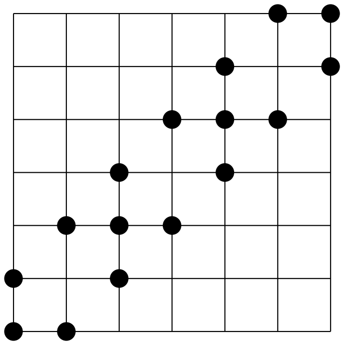
j を整数として, $(2j+1,2j+1)$ $(1\leqq 2j+1\leqq n)$, $(j+1,j)$ $(1\leqq j\leqq n-1)$, $(j,j+1)$ $(1\leqq j\leqq n-1)$ と表される点に石を置く. このとき石が置かれた点の個数は $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]+(n-1)+(n-1)=\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ である.

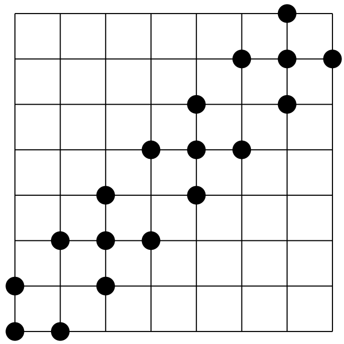
この配置が条件をみたすことを確認する. $n=1$ のときは明らかなので, $n\geqq 2$ のときを考える. この配置は直線 $x=y$ に対して対称であるから, $S_1,S_2,\dots,S_n$ のどの 2 つも共通部分をもたないことを示せばよい. これは, j を整数として,

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{3\} && \\
S_{2j} &= \{4j\} && (2\leqq 2j\leqq n-1)\\
S_{2j+1} &= \{4j+1,4j+2,4j+3\} && (3\leqq 2j+1\leqq n-1)\\
S_n &= \{2n-1\} && (n\text{ が奇数のとき})\\
S_n &= \{\} && (n\text{ が偶数のとき})
\end{aligned}$$

となることからわかる.

文章だとややわかりにくいかもしれませんが, 例として $n=7$, $n=8$ のときの図を実際に描くと以下のようになります.





$m \leqq \left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ を示すときに不等号が生じた部分をなるべく等号にしようとし, a_2 と a_3 を大きくしようと考えると, この配置に辿り着くことができます.

この配置が「良い等脚台形」を含まないことの証明には, 以下のような方法がありました.

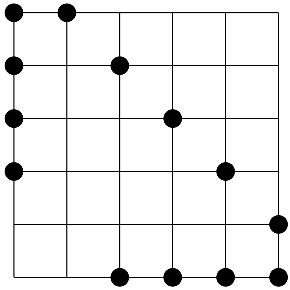
◦○◯ 別解 (漆黒さんの解答より)

(石の配置は上の解答と同じ)

この配置では, 「良い等脚台形」の上辺, 下辺の長さは 1, 2 にしかならないので, 「良い等脚台形」は長方形を除くと作られない. どの 4 つの石も辺が x 軸または y 軸に平行な長方形とはならないので, 条件をみたす.

長方形がないことを正確に書くのも容易なので, 非常に簡潔でわかりやすい示し方だと思います.

なお, $\left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$ 個の点に石を置く方法は, この形だけしかないわけではありません. $n=6$ で形が全く異なるものを次の図で紹介します. $a_4 \neq 0$ であるような例があることがわかります.



ところで, 今回の問題を作った背景には, 以下のような問題があります：

> n を正の整数とする. xy 平面上の n^2 個の点 (i, j) (i, j は 1 以上 n 以下の整数) を考え, これらの点のうちいくつかに石を置く. 以下の条件をみたさなければならないとき, 石を置ける点の個数の最大値を求めよ.
>
> 条件： どの 4 個の石も, 同一円周上または同一直線上の 4 点とはならない.

これは, 何年か前に日本数学オリンピック参加者の一部の間で話題になった問題で, 恐らく未解決問題です. n に対する最大値を $k(n)$ を書くことにすると, $k(n)$ は n の綺麗な式では書けないだろうと思われていますが, 以下のことがわかっています.

（1）小さい n に対する $k(n)$ の値：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k(n)$	1	3	5	7	9	11	14	15	18

（2）p を 4 で割って 1 余る素数とするとき, $n \geqq p$ であれば $k(n) \geqq p$.

（3）$k(n) \leqq \left[\dfrac{5n-3}{2}\right]$.

(1) はコンピュータを用いて, (2) は整数論を用いて示されました. そして (3) は今回の問題のように等脚台形を考えて示された結果です (同一直線上の 4 点がないため本問より簡単に証明が書けます). これを読んでくださっている皆さんも, 興味があったらぜひ $k(n)$ についていろいろ考えてみてください.

感想欄より

> 難しかったです. 正解している自信はありません.

果たして本当にこんなものの最大値が求まるのか, という感じの問題にも見えてしまうので, アイデアを得るのはなかなか難しいですよね.

> 実際にどのような置き方が置く石の個数の最大となるかを考えるのが解くための最短路だと思います.

置き方から考えれば, 「なぜたくさん置けないか」を考えることで方針が見えてきそうですね. 今回の問題に限らず, 組合せ分野の問題は具体的な実験が有効なことが多いです.

> この問題コーナーは何回目か良く覚えていませんが, TEX を使ったのは初めてです. 問題を解くより解答を書くほうが苦労したといっても過言ではないほど大変でした.

TEX の書き方は最初は難しいと思いますが, 使いこなせるようになれば便利なので, 徐々に慣れていってみてください.

> n の偶奇で最大値は異なるが, 配置の仕方は同じという点が面白い.

出題者も最初は「偶数のときはぴったりでないから端の方で配置を変える必要があるのでは」と思っていたので, 同じ配置でよいことに気付いたときには確かに意外でした.

(ほさか かずひろ
東京大学理科一類 1 年)