問題コーナー
第 37 回
吉田 雄紀

C

2010年08月10日出題
09月10日締切
10月 8日解説

n を正の整数とし, 0 以上 n 未満の整数全体の集合を A とおく. $f: A \to A$ であり, 任意の $m \in A$ に対して $f(m) = \# f^{-1}(m)$ をみたすような関数 f はいくつあるか.

ただし, $f^{-1}(m)$ とは, A の元 k であって $f(k) = m$ をみたすもの全体からなる集合である. また, 集合 X に対して, $\# X$ で X の元の個数を表す.

解 説

こんにちは, 第 37 回問題コーナー担当の吉田です.

今回の問題は, いわゆる「この文章中には 0 が ( ) 個, 1 が ( ) 個, 2 が ( ) 個, $\cdots$, 9 が ( ) 個書かれている. 括弧に適当な数字を入れよ」といった類の有名 (?) なクイズをもとにしたものです.

◦○◯ 解答例

問題文中の条件をみたす関数 f が存在するとする.

まず $f(0) = 0$ と仮定すると, $\# f^{-1}(0) = f(0) = 0$ かつ $0 \in f^{-1}(0)$ となり矛盾するため, $f(0) \neq 0$ である.

$f(0) = m = \# f^{-1}(0)$ $(1 \leqq m < n)$ とする. このとき 1 以上 n 未満の整数のうち, m 個が 0 に移り, $n-m-1$ 個が正の整数に移る. 一方, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \# f^{-1}(k) = \# A = n$ であり, これと $f(0) = m$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = n-m$ である. 和が $n-m$ であるような $n-m-1$ 個の正の整数としては, $n-m-2$ 個の 1 と 1 個の 2 のみが考えられる. したがって, 1 以上 n 未満の整数のうち m 個が 0, $n-m-2$ 個が 1, 1 個が 2 に移る. そして, 0 は $m(>0)$ に移る. - (★)

ここで, $\# f^{-1}(k) = 0$ なる $k \in A$ の個数に注目する. 上の結果より, $f(A)$ (ある $i \in A$ が存在して $f(i) = k$ となるような k 全体の集合) は

$$\begin{cases} \{0,2\} & (n-m-2=0 \text{ かつ } m=2 \text{ のとき}) \\ \{0,2,m\} & (n-m-2=0 \text{ かつ } m\neq 2 \text{ のとき}) \\ \{0,1,2\} & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m=1,2 \text{ のとき}) \\ \{0,1,2,m\} & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m\neq 1,2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるので, $\#f^{-1}(k)=0$ なる $k\in A$ の個数は

$$\begin{cases} n-2 & (n-m-2=0 \text{ かつ } m=2 \text{ のとき}) \\ n-3 & (n-m-2=0 \text{ かつ } m\neq 2 \text{ のとき}) \\ n-3 & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m=1,2 \text{ のとき}) \\ n-4 & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m\neq 1,2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. しかし $\#f^{-1}(k)=f(k)$ であるので, この値は $f(k)=0$ なる $k\in A$ の個数, すなわち $\#f^{-1}(0)=f(0)=m$ に等しくなければならない. よって

$$\begin{cases} n-2=m & (n-m-2=0 \text{ かつ } m=2 \text{ のとき}) \\ n-3=m & (n-m-2=0 \text{ かつ } m\neq 2 \text{ のとき}) \\ n-3=m & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m=1,2 \text{ のとき}) \\ n-4=m & (n-m-2\neq 0 \text{ かつ } m\neq 1,2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が必要である. これらを解くと, ありうる (n,m) の組は $(4,2)$, $(4,1)$, $(5,2)$, $(t,t-4)$ $(t\geqq 7)$ の 4 つのみであることがわかる (これら 4 つは, それぞれ上の $1,3,3,4$ 番目の場合から得られる).

これら 4 つの場合それぞれについて, (★) より, 各 $k\in A$ に移る A の元数 (つまり $\#f^{-1}(k)$) が分かるが, $\#f^{-1}(k)=f(k)$ より, 4 つの場合それぞれについて関数 f が 1 つに定まる. 具体的には

- $n=4$, $(f(0),f(1),f(2),f(3))=(2,0,2,0)$
- $n=4$, $(f(0),f(1),f(2),f(3))=(1,2,1,0)$
- $n=5$, $(f(0),f(1),f(2),f(3),f(4))=(2,1,2,0,0)$
- $n\geqq 7$, $f(k)=\begin{cases} n-4 & (k=0) \\ 2 & (k=1) \\ 1 & (k=2,n-4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

を得るが, 逆にこれらはいずれも問題文の条件をみたす. よって, 求める関数の

> 個数は
> $$\begin{cases} 0\,個 & (n=1,2,3,6) \\ 2\,個 & (n=4) \\ 1\,個 & (n=5, n \geqq 7) \end{cases}$$
> である.

$f(0)$ に注目することで, 各元の f での移り先の様子を示した (★) を短い議論で得ることができます. さらに $\#f^{-1}(0) = f(0)$ に注目することで, 可能な (n,m) の組を一気に絞ることができます. その後は場合分けが煩雑ですが, 漏れのないようにしましょう.

感想欄より

最初問題文を読んだときは複雑だと思ったが, 解いてみると面白い問題だった.

実は, 類題経験がありました, ずいぶん前でしたが, すぐに思い出しました. それにしても, 美しい問題です. 小さい n でしたら, 小学生でも楽しめそうですね.

たぶん数オリでこの問題に近いのが出たような気が $\cdots$.

最初に書いたように, この問題は (小学生でも楽しめそうな) クイズっぽい形で出題されることもあるので, 類題を経験している人はかなりいるかもしれません. ただし本問のように n を一般化した問題は, 少し珍しいかもしれません. あと, 数オリの過去問ですか $\cdots$. たぶん昔の問題すぎて, 僕は知りません. $\cdots$ って, それだけだと何だかそっけないので, 昔の数オリについて一言. んー, そうですね $\cdots\cdots\cdots\cdots$, 昔の数オリといえば, 全然関係ないですけど, いつだったか "kyonkyon" という文字列を含む問題が出題されたことがあるんですよ. 気になる人は探してみてください.

A を非負整数全体の集合にしたら話が大きく変わりそうですね．たぶん存在しないと思いますが.

それは, 読者への宿題としましょう！

$\left(\begin{array}{l}\text{よしだ ゆうき}\\ \text{東京大学医学部医学科 3 年}\end{array}\right)$