問題コーナー

# 第 32 回

伊藤 佑樹

C

2010 年　3 月 24 日出題
4 月 24 日締切
5 月 16 日解説

$m \times n$ のマス目がある. いま, このマス目のうちいくつかにナイトと呼ばれる駒が置かれている. この状態を状態 A と呼ぶ. そこで, 同じマスに止まる 2 つの駒がないようにすべての駒を動かした. この状態を状態 B と呼ぶ. すると, どのマスも状態 A と状態 B のいずれか一方でのみ駒が置かれた. このようなことが起きうるような整数の組 $(m,n)$ をすべて求めよ.

ただし, ナイトは

- 右または左に 2 マス, そして上または下に 1 マス動く
- 右または左に 1 マス, そして上または下に 2 マス動く

といういずれかの動きをする駒である.

## 解説

こんにちは, 第 32 回問題コーナー担当者の伊藤です. 問題に取り組んでいただいた皆様, ありがとうございました. 正解は 9 人ということでした.

今回は数学というよりはパズルのような問題だったのではないかと思います. 初めはどのようなものができるのかすぐには分かりにくいかと思いますが (少なくとも筆者はそうでした), 実験していくうちにほとんどの場合が条件をみたすことが分かります. それでは, 解答に入りましょう.

### ◦○◯ 解答

まず, $m,n$ は 1 でないことは明らか. また, マスの総数はナイトの数の 2 倍であるから偶数であり、$m,n$ のうち少なくとも一方は偶数でなければならないことに注意しておく。

以下, $m$ の値で場合分けをする.

(1) $m,n$ のうち少なくとも一方が 2 のとき

$m = 2$ の場合を考えても一般性は失われない. 上の段のマス

に $1,2,3,4,1,2,\ldots$ と左から順に書きこむ. また, 下の段のマスに $3,4,1,2,3,4,\ldots$ と左から順に書きこむ. すると, 下図のようになる.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | … |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |

このとき, ナイトは同じ数の書きこまれたマスにしか移動できない. よって, 条件をみたすためには $n$ が 4 の倍数であることが必要である.
そして, 下図において同じ数字の書かれたマスのうち一方にナイトを配置することで $2\times 4$ のマス目は条件をみたす.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

この配置を繰り返すことで $n$ が 4 の倍数である場合は条件をみたす.
以上より, この場合は $n$ が 4 の倍数であることが必要十分である.

(2) $m,n$ がともに 3 以上であるとき

a) $m=3$ のとき

$mn$ は偶数でなければならないので, $n$ が偶数であることが必要である.
下図において同じ数字の書かれたマスのうち一方にナイトを配置することで $3\times 4$ のマス目は条件をみたす.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 6 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 5 | 4 | 2 | 6 |

また, 下図において同じ数字の書かれたマスのうち一方にナイトを配置することで $3\times 6$ のマス目は条件をみたす.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| 2 | 5 | 1 | 4 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 2 | 7 | 8 | 9 |

$n$ が 8 以上の偶数の場合は $n=4a+6b$ ($a,b$ は 0 以上の整数) と表せるので, 上記の $3\times 4$ のマス目, $3\times 6$ のマス目の場合の配置をそれぞれ横に $a$ 個, $b$ 個並べることで条件をみたすようにナイトを配置できる.
以上より, この場合は $n$ が 4 以上の偶数であることが必要十分である.

b）$m=4$ のとき

上までの議論と対称性より $n=2,3$ の場合は条件をみたす. $n$ が 4 以上の場合は $n=2a+3b$ ($a,b$ は 0 以上の整数) と表せるので, $4\times 2$ のマス目, $4\times 3$ のマス目の場合の配置をそれぞれ縦に $a$ 個, $b$ 個並べることで条件をみたすようにナイトを配置できる.

以上より, すべて条件をみたす.

c）$m=5$ のとき

$mn$ は偶数でなければならないので, $n$ は偶数であることが必要である.

上までの議論と対称性より $n=4$ の場合は条件をみたす.

下図において同じ数字の書かれたマスのうち一方にナイトを配置することで $5\times 6$ のマス目は条件をみたす.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 7 | 8 |
| 14 | 15 | 12 | 10 | 6 | 5 |
| 12 | 11 | 13 | 9 | 8 | 7 |
| 13 | 14 | 15 | 11 | 10 | 9 |

$n$ が 8 以上の偶数の場合は $n=4a+6b$ ($a,b$ は 0 以上の整数) と表せるので, $5\times 4$ のマス目, $5\times 6$ のマス目の場合の配置をそれぞれ横に $a$ 個, $b$ 個並べることで条件をみたすようにナイトを配置できる.

以上より, この場合は $n$ が 4 以上の偶数であることが必要十分である.

d）$m$ が 6 以上の偶数のとき

上までの議論と対称性より $n=3,4,5$ の場合は条件をみたす. $n$ が 6 以上の場合は $n=3a+4b$ ($a,b$ は 0 以上の整数) と表せるので, $m\times 3$ のマス目, $m\times 4$ のマス目の場合の配置をそれぞれ横に $a$ 個, $b$ 個並べることで条件をみたすようにナイトを配置できる.

以上より, この場合はすべて条件をみたす.

e）$m$ が 6 以上の奇数のとき

$mn$ は偶数でなければならないので, $n$ は偶数であることが必要である.

上までの議論と対称性より $n=4,6$ の場合は条件をみたす. $n$ が 8 以上の場合は $n=4a+6b$ ($a,b$ は 0 以上の整数) と表せるので, $m\times 4$ のマ

ス目, $m \times 6$ のマス目の場合の配置をそれぞれ横に $a$ 個, $b$ 個並べることで条件をみたすようにナイトを配置できる.

以上より, この場合は $n$ が 4 以上の偶数であることが必要十分である.

これですべての場合が尽くされた. 以上をまとめると, 題意をみたす $(m,n)$ は

- $m=2$ かつ $n$ が 4 の倍数であるとき,
- $m$ が 4 の倍数かつ $n=2$ であるとき,
- $m,n \geqq 3$ かつ $mn$ が偶数であるとき

である.

正解された方は細かい差異を除けば, これと同じ方針でした. いくつかの小さい場合を構成すれば, あとはそれを組み合わせてやればできるというのがポイントだったかと思います. パズルのように楽しんで解いていただいたのであれば幸いです.

## 感想欄より

ある程度以上ならばどちらかが偶数なら OK となることは予想がつきましたが, 「3 以上」というのは予想より随分小さく, 議論が簡単になりました.

非自明なものが肯定的に解決されると気づくのが難しかったです。

筆者も作問段階ではここまですべての場合に可能になるとは思っていなかったので, 驚きました.

ほとんどすべてが条件を満たしたので楽しかったです.

実験しながら解いたので, 楽しかったです.

今回は非常に手軽な問題でした.

気軽に楽しんでいただけたのであれば筆者としてはうれしい限りです.

> かなりカッコ悪い回答になってしまいました. かっこいい解答よろしくお願いします.

結局場合分けを並べる解答になってしまいました (苦笑) こういった問題だとどうしても細かい場合を除くのに長い解答になってしまう印象があります.

> 試行錯誤を要する問題ですよね. 初めこの問題を見たときは「解けない」と思いましたが, やっている内に解けていました.

> 配置の例を見つけるまでが大変でした.

試行錯誤の部分もこの問題の楽しいところだと思ったのですが, 楽しんでいただいていれば幸いです.

> 図 (表) が入らないので説明がごちゃごちゃになりました. どうすればいいですか？

TeX を使えば表なども簡単に作れるので, 使えるようになるといいと思います！

(いとう ゆうき
東京大学医学部 4 年)