問題コーナー

第 25 回

清水 俊宏

C

2009年 8月10日出題
9月10日締切
10月 7日解説

2 以上の整数全体の集合を S とする. S の各元を赤, 青, 黄のいずれかの色で塗り分けたい. ただし, 塗り分けの際には, 3 色のうちどの色も少なくとも 1 回は使わなくてはならない.

(1) 以下の条件をみたすように塗ることは可能か.

条件： 異なる色で塗られた 2 つの整数 a, b を任意に取り出したとき, $a+b$ は常に残った 1 つの色 (すなわち, a,b のいずれでもない色) で塗られている.

(2) (1) の条件において, $a+b$ の部分を ab に変えたとき, そのような塗りわけは可能か.

(3) (1) の条件において, b の部分を a^b に変えたとき, そのような塗りわけは可能か.

解説

こんにちは, 第 25 回問題コーナー担当の清水です.

今回は比較的やさしい問題を出してみました. 答えはすべて「存在しない」です.

方針はいろいろありますが, 三色の分類表を作り, 具体的に書き出していってみればいずれもすぐに矛盾を導き出せるはずです.

どの解答者も十人十色の方針で解いてくれていました (解答者は十人もいませんでしたが (笑)).

それでは解答例です. S の元, $2,4$ の色に注目して考えるという方針です.

◦○◯ 黒川瞬さんの答案より

(1) 2 と 4 を同じ色で塗る場合. 一般性を失うことなく, その色を赤としてよい. 2 は赤...[1], 4 は赤...[2] である. 青で塗る数のうち最も小さい数を m とする. (3 色のうちどの色も少なくとも 1 回はつかわなくてはならないという条件

から, そのような m は存在する.) m は青...[3] である. [1] と [3] より, $m+2$ は黄...[4] である. [2] と [3] より, $m+4$ は黄...[5], [1] と [4] より, $m+4$ は青...[6] である. [5] と [6] は矛盾. よって, 塗り分けられない.

2 と 4 を違う色で塗る場合. 一般性を失うことなく, 2 を赤...[7], 4 を青...[8] として [7] と [8] より, 6 は黄...[9], [7] と [9] より, 8 は青...[10] [7] と [10] より, 10 は黄...[11], [8] と [9] より 10 は赤...[12], [11] と [12] は矛盾. よって塗り分けられない.

以上より, 条件をみたすように塗り分けることは不可能.

(2) 2 と 4 を同じ色で塗る場合. 一般性を失うことなくその色を赤としてもよい. 2 は赤...[1], 4 は赤...[2] である. 青で塗る数のうち最も小さい数を m とする ((1) と同様の理由によりそのような m は存在する). m は青...[3], [1] と [3] から, $2m$ は黄...[4], [2] と [3] から, $4m$ は黄...[5], [1] と [4] から, $4m$ は青...[6] であるが, [5] と [6] は矛盾. よって, 塗り分けられない.

2 と 4 を違う色で塗る場合. 一般性を失うことなく, 2 を赤...[7], 4 を青...[8] としてよい. [7] と [8] より, 8 は黄...[9], [7] と [9] より, 16 は青...[10], [7] と [10] より, 32 は黄...[11], [8] と [9] より 32 は赤...[12] であるが, [11] と [12] は矛盾. よって塗り分けられない.

以上より, 条件をみたすように塗り分けることは不可能.

(3) 2 と 4 を同じ色で塗る場合. 一般性を失うことなく, その色を赤としてよい. 2 は赤...[1], 4 は赤...[2] である. 青で塗る数のうち最も小さい数を m とする（m の存在性については上と同様）. m は青...[3], [1] と [3] から, 2^m は黄...[4], [2] と [3] から, 4^m は黄...[5], [1] と [4] から, $(2^m)^2$ は青...[6] であるが, $4^m=(2^m)^2$ なので, [5] と [6] は矛盾. よって, 塗り分けられない.

2 と 4 を違う色で塗る場合. 一般性を失うことなく, 2 を赤...[7], 4 を青...[8] としてよい. [7] と [8] より, 2^4 は黄...[9], [7] と [9] より, $(2^4)^2=2^8$ は青...[10], [7] と [10] より, $(2^8)^2=2^16$ は黄...[11], [8] と [9] より $(2^4)^4=2^16$ は赤...[12] であるが, [11] と [12] は矛盾. よって塗り分けられない.

以上より, 条件をみたすように塗り分けることは不可能.

過半数の人がこれと同様な方針で解いてくれていました. 少し考えると (1) と (2) は足し算が掛け算に変わっただけで, ほぼ同じ方針で解けることが分かると思い

ます.

また, 実は, (3) の条件から, (2) の条件が導き出されます. そのことに注目して解いてくれた答案を紹介します.

◦○◯ beta **さんの答案より**

> (1) このような塗り分け方が存在すると仮定する. その塗り分け方において, 赤, 青, 黄に塗られた数を 1 つずつとり, それぞれ a,b,c とする. (塗り分け方の条件より, このような a,b,c が存在することが保証されている.) すると条件より, $a+b$ は黄, $2a+b(=(a+b)+a)$ は青, $2a+b+c(=(2a+b)+c)$ は赤となる. ここで, $2a+b+c=(a+b+c)+a$ であるから, $a+b+c$ が青か黄であると, $2a+b+c$ が赤であるという条件に反する. よって $a+b+c$ は赤. しかし, 同様に $a+2b+c$ について考えると, $a+b+c$ が青となり, 矛盾. よって, このような塗り分け方は存在しない.
>
> (2) (1) と同様に考える. a,b,c を同様に定義すると, ab は黄, $(a^2)b$ は青, a^2bc は赤, abc も赤となるが, $a(b^2)c$ について考えると abc が青となり矛盾. よってこのような塗り分け方も存在しない.
>
> (3) このような塗り分け方が存在する時に (2) の条件を満たすことを示す. そのためには, 任意の青い S の元 b と任意の黄色い S の元 c について, bc が赤であることを示せば十分 (対称性より). a を (1) と同様, ある赤に塗られた数とする. このとき, 条件より a^b は黄, a^{ab} は青, a^{abc} は赤となる. すると $a^{abc}=(a^{bc})^a$ より, a^{bc} が青か黄なら, a^{abc} が赤でなくなるので, a^{bc} は赤であり, さらに bc が青か黄なら, a^{bc} が赤でなくなるので, bc は赤である. よって, (3) の条件が成り立つとき, (2) の条件も成り立つので, このような塗り分け方は存在しない.

この答案でのポイントは (1) において, $a, a+b$ が同じ色であったとき, b もその色でなくてはならないということです (理由は分かりますね？分からない人はもう一度上記の答案を読んでみましょう！). 本問の設定において, この条件は非常に強力であり, これに気づいてしまえばどれも容易に解くことができます. (2), (3) に関しても足し算がかけ算, べき乗に変わっただけでほぼ同様のことが成り立ちます.

感 想 欄 よ り

「1 問でも解けた方は是非ご応募ください！」とありましたが, (1)〜(3) までほぼ同様にして解けるので 1 問解けた人は 3 問ともとけるでしょうね.

はい. その通りです (笑). a^b のような見かけ倒しにつまづいてくれる人がいるかと意図して出してみました.

可能のものが 1 つもなかったのは残念でした. 具体的な構成を考えてみたかったのに.

(1) から (3) まで実質同じ問題ですね. 答えが違っていると面白かったのですが....

筆者自身も塗り分け可能なものを入れようと考えていましたが, うまい問題が思いつかず, 断念してしまいました. …が, 出題後に夏季セミナー OB のある方から, $2a+2b$ や a^2b^2 がうまく塗り分けすることが可能であるというご指摘を受けました. よかったら, これらの例についても考えてみてください.

答案にしてみるとなんのことはない問題ですが, 考える過程は楽しかったです.

あまり自信がありませんが, 楽しかったです.

ありがとうございます. これからも楽しんで挑戦してください！

(しみず としひろ
京都大学大学院情報学研究科修士 1 回生)