問題コーナー

第 20 回

中村 勇哉

N

2009年 3月10日出題
4月10日締切
5月 7日解説

漸化式 $F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n (n \geqq 1)$ で定義される数列をフィボナッチ数列という. k を正の整数とするとき, 以下の問いにそれぞれ答えよ.

(1) F_n が F_k で割りきれるための n の条件を求めよ.

(2) F_n が $(F_k)^2$ で割りきれるための n の条件を求めよ.

(3) F_n が $(F_k)^3$ で割りきれるための n の条件を求めよ.

解説

今回はフィボナッチ数をテーマとした問題でした. フィボナッチ数の基礎的な知識が必要な部分もあり, 手がつけにくい問題だったかもしれません. フィボナッチ数に関しては美しい性質が多く, 「実験」によってその性質を発見するのが醍醐味だと思います. 今回の問題についても, 実験をすることによって方針がつかめた応募者も多かったようです.

(1) 早速答から.

(1) $k=1,2$ のとき「n は正の整数であること」.
$k \geqq 3$ のとき「n は k の倍数であること」.

(2) $k=1,2$ のとき「n は正の整数であること」.
$k \geqq 3$ のとき「n は kF_k の倍数であること」.

(3) $k=1,2$ のとき「n は正の整数であること」.
$k \geqq 3$ であって, k を 6 で割った余りが 3 でないとき「n は $k(F_k)^2$ の倍数であること」.
k を 6 で割った余りが 3 であるとき「n は $\dfrac{1}{2}k(F_k)^2$ の倍数であること」.

(2) 方針.

正解している皆さんは, ほとんど同じ方針でした. まず基本的なフィボナッチの公式として, 次の 3 つの補題を示します.

補題 1.(加法定理) $F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m+1}F_n (m,n>0)$ が成立する.

補題 2. F_n, F_{n+1} は互に素である.

補題 3. $m > 2$ とするとき,「$F_m \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n$」が成立する.

補題 3 が示されると (1) に答えることができます. 続いて (2)(3) を考えると, やはり補題 3 により, $n = ak$ の形のフィボナッチ数のみを考えればよいことがわかります. そこで (1) を繰り返し用いて, F_{ak} を F_k, F_{k-1} の多項式の形で表すことを考えます. 例えば $a = 2,3$ については,

$$\begin{aligned} F_{2k} &= F_kF_{k+1} + F_{k-1}F_k = F_k(F_k + 2F_{k-1}) \\ F_{3k} &= F_kF_{2k+1} + F_{k-1}F_{2k} = F_k(F_k^2 + F_{k+1}^2) + F_{k-1}F_k(F_k + 2F_{k-1}) \\ &= F_k(2F_k^2 + 3F_kF_{k-1} + 3F_{k-1}^2) \end{aligned}$$

のようになります.

F_{ak} が F_k, F_{k-1} の多項式で表されれば, $\bmod (F_k)^3$ においては F_k の次数が 3 以上ある項を無視すればよく, 見通しが良くなります.

いよいよ, 解答例の紹介に入りたいと思います.

フィボナッチ数の性質の多くは帰納法を用いて証明することができます. ただ, 帰納法の多くは天下り的な解答になり, 着想が見えにくくなります. それ故に解答例に際しては, 天下り的な帰納法をあえて避けてあります. 厳密性に不安のある人は, 是非帰納法を完結させてみてください.

◦○◯ 解答例

まず $k = 1,2$ については $F_1 = F_2 = 1$ より任意の正の整数 n について F_n は F_1, F_2 で何回でも割りきれることがわかる. 以下 $k > 2$ の場合を考える.

補題 1. (加法定理) 正整数 m,n に対して, $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m+1}F_n$ が成立する.

証明 一般項より求める方法や, 帰納法による証明があるが, ここでは行列を用いた証明を与える.

まず, フィボナッチ数が満足する漸化式により

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立ち, 右辺の 1,2 成分を計算すれば $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ を得る. ■

補題 2. 正の整数 n について F_n, F_{n+1} は互に素である.

証明 正整数 a, b の最大公約数を (a, b) と書くことにすれば, 一般に $(a+b, b) = (a, b)$ が成立する (ユークリッドの互除法) .

$$(F_{n+1}, F_n) = (F_n + F_{n-1}, F_n) = (F_{n-1}, F_n)$$

を得る. よって帰納的に $(F_{n+1}, F_n) = (F_2, F_1) = 1$ となる. 即ち, F_n, F_{n+1} は互に素である. ■

補題 3. $m > 2$ とするとき, $F_m \mid F_n$ となる必要十分条件は $m \mid n$ である. ただし, 正の整数 a, b に対し $a \mid b$ は「a は b を割り切る」を表す.

証明 まず十分条件であることを示す. 正の整数 k について $F_m \mid F_{km}$ であることを k に関する帰納法を用いて示す. $k = 1$ のときは明らかである. $F_m \mid F_{km}$ と仮定すれば, 加法定理 (補題 1) により

$$F_{(k+1)m} = F_{km+m} = F_{km+1} F_m + F_{km} F_{m-1}$$

であることから $F_m \mid F_{(k+1)m}$ である.

次に必要条件であることを示す. $n = km + r \ \ (0 \leq r < m)$ とし, $F_m \mid F_{km+r}$ と仮定する. 加法定理 (補題 1) により,

$$F_{km+r} = F_{km+1} F_r + F_{km} F_{r-1}.$$

$F_m \mid F_{km}$ であったから $F_m \mid F_{km+r}$ により $F_m \mid F_{km+1} F_r$ を得る. 補題 2 より $(F_{km+1}, F_{km}) = 1$ ゆえ $(F_{km+1}, F_m) = 1$ だから $F_m \mid F_r$ である. $m < r$ に注意して, $m > 2$ であれば $r = 0$ となる. よって $m \mid n$ である. ■

さて, 問 (1) に答えよう. 補題 3 により, $F_k \ \ (k > 2)$ で割り切れるフィボナッチ数 F_n は $n = ak$ (a は正整数) となることがわかる.

(2)(3) については, 補題 3 により, n は $n = ak$ (a は正の整数) の形をしていることが必要条件であることがわかる. F_{ak} を $(F_k)^3$ で割った余りについては次の結果が得られる.

補題 4. 正の整数 a, k について $F_{ak} \equiv (F_{k+1})^a + (F_{k-1})^a \pmod{(F_k)^3}$

証明 加法定理により,

$$\begin{aligned} F_{ak} &= F_{(a-1)k+1} F_k + F_{(a-1)k} F_{k-1}, \\ F_{(a-1)k+1} &= F_{(a-2)k+1} F_{k+1} + F_{(a-2)k} F_k \\ &\equiv F_{(a-2)k+1} F_{k+1} \\ &\equiv \cdots \end{aligned}$$

$$\equiv F_{k+1}^{a-1} \pmod{F_k^2}$$

であるから, F_k^3 を法として

$$F_{ak} \equiv F_{k+1}^{a-1}F_k + F_{(a-1)k}F_{k-1}$$

であり, $F_{(a-1)k}$ に上の結果を適用して

$$F_{ak} \equiv F_{k+1}^{a-1}F_k + (F_{k+1}^{a-2}F_k + F_{(a-2)k}F_{k-1})F_{k-1}$$

であり, 帰納的に

$$\begin{aligned}F_{ak} &\equiv F_k(F_{k+1}^{a-1} + F_{k+1}^{a-2}F_{k-1} + \cdots + F_{k-1}^{a-1}) \\ &= F_k\frac{F_{k+1}^a - F_{k-1}^a}{F_{k+1} - F_{k-1}} \\ &= F_{k+1}^a - F_{k-1}^a\end{aligned}$$

とわかる (正確には帰納法により確かめよ). ■

ここでただちに問 (2) に答えることができる. 補題 4 の主張の F_{k+1} に $F_k + F_{k-1}$ を代入して, $(F_k)^2$ を法としてみれば $F_{ak} \equiv aF_kF_{k-1}$ が得られる. F_k と F_{k-1} は互いに素である (補題 2) から $F_k^2 \mid F_{ak}$ であるための必要十分条件は $F_k \mid a$ である. ゆえに, F_k で割り切れるフィボナッチ数 F_n は $n = bkF_k$ (b は正整数) の形である.

最後に問 (3) を考えよう. 補題 4 の主張の F_{k+1} に $F_k + F_{k-1}$ を代入して, $(F_k)^3$ を法としてみれば,

$$F_{ak} \equiv \frac{1}{2}a(a-1)F_k^2F_{k-1}^{a-2} + aF_kF_{k-1}^{a-1}$$

である. 問 (2) と補題 3 より $F_n^3 \mid F_{ak}$ となる条件は $a = bF_k$ の形を考えればよいので, $a = bF_k$ とすれば,

$$F_{bkF_k} \equiv \frac{1}{2}bF_k^3(bF_k - 1)F_{k-1}^{a-2} + bF_k^2F_{k-1}^{a-1} \qquad (\heartsuit)$$

である. ここで (i)F_k が奇数であるときと (ii) F_k が偶数であるときとで場合分けが必要となる.

(i) F_k が奇数であるとする.

このとき $(F_k)^3 \mid F_{ak}$ と $(F_k)^3 \mid 2F_{ak}$ とが同値である.

$$\begin{aligned}2F_{bkF_k} &\equiv bF_k^3(bF_k - 1)F_{k-1}^{a-2} + 2bF_k^2F_{k-1}^{a-1} \\ &\equiv 2bF_k^2F_{k-1}^{a-1}\end{aligned}$$

において, $2F_{k-1}^{a-1}$ と F_k とは互いに素であるから, $F_k^3 \mid F_{ak}$ であるための必要十分条件は $F_k \mid b$ である.

(ii) 次に F_k が偶数であるとする.

(♡) より $F_k^3 \mid F_{bkF_k}$ であるためには $\frac{1}{2}F_k^3 \mid bF_k^2 F_{k-1}^{a-1}$ であることが必要. よって $\frac{1}{2}F_k \mid b$ が必要である. そこで $b = \frac{1}{2}cF_k$ とすると,

$$F_{bkF_k} \equiv \frac{1}{2}F_k^3 F_{k-1}^{a-2} c\left(\frac{1}{2}F_k(bF_k - 1) + F_{k-1}\right)$$

であるから, $F_k^3 \mid F_{bkF_k}$ であることと $c\left(\frac{1}{2}F_k(bF_k - 1) + F_{k-1}\right)$ が偶数であることとが同値となる. 簡単な場合分けにより, $F_k \equiv 0 \pmod 4$ のとき

$$c \text{ が偶数である} \iff c\left(\frac{1}{2}F_k(bF_k - 1) + F_{k-1}\right) \text{が偶数である}$$

であり, $F_k \equiv 2 \pmod 4$ のとき,

$$c \text{ に因らず } c\left(\frac{1}{2}F_k(bF_k - 1) + F_{k-1}\right) \text{が偶数である}$$

ことがわかる.

また, $F_k \equiv 0 \pmod 2$ となるのは k を 6 で割った余りが 3 になるときに限る.

以上により, $k > 2$ について F_k^3 が F_n を割り切る必要十分条件は

$$n = \begin{cases} kF_k^2 & k \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod 6 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2}kF_k^2 & k \equiv 3 \pmod 6 \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

以上により問 (1)(2)(3) の答 (前掲) が得られた.

最後に, この問題の一般化として「非負整数 a に対し $(F_k)^a$ で割りきれる最小のフィボナッチ数は何番目か」という問題を提示しておきます. 尚, 今回の問題文では $(F_k)^a$ で割りきれるフィボナッチ数をすべて求めよという問題でしたが, 補題 3 により, $(F_k)^a$ で割りきれる最小のフィボナッチ数を求める問題に帰着されます.

一般化のヒントとして, 解答例と同じ方針で F_{ak} を F_k と F_{k-1} で表すことを考えてみましょう. そのための準備として, ルカス数列と呼ばれる数列と, フィボナッチ数の一般項を導入します.

定義　漸化式 $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n (n \geqq 1)$ で定義される数列を**ルカス**

数列という.

ルカス数を初項から順に並べると $1,3,4,7,11,18,29,47,\ldots$ となります. フィボナッチ数との関係としては $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ が成立することが重要です.

さて, フィボナッチ数とルカス数の一般項は $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ を用いて,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),\ \ L_n = \alpha^n + \beta^n$$

と表すことができます. よって,

$$F_{ak} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{ak} - \beta^{ak}),\ \ \alpha^k = \frac{L_k + \sqrt{5}F_k}{2},\ \ \beta^k = \frac{L_k - \sqrt{5}F_k}{2}$$

より,

$$\begin{aligned} F_{ak} &= \frac{1}{2^a\sqrt{5}}\left((L_k + \sqrt{5}F_k)^a - (L_k - \sqrt{5}F_k)^a\right) \\ &= \frac{1}{2^{a-1}}\left({}_a\mathrm{C}_1 L_k^{a-1} F_k + 5\,{}_a\mathrm{C}_3 L_k^{a-3} F_k^3 + 5^2\,{}_a\mathrm{C}_5 L_k^{a-5} F_k^5 + \ldots\right) \end{aligned}$$

となります. ここで L_n に $F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n-1} + F_n$ を代入すれば, F_{an} を F_n と F_{n-1} であらわせたことになります.

勿論, 今回の問題もこの方法で, 補題 4 を直接示すことができます.

感想欄より

> 今回は, 実験結果からの予想と (3) の答が違ったので驚きました. 予想では (3) のときは $k=3$ も例外扱いするのか, と思っていましたが, 予想よりも答の方が規則性が高く, $k=3$ は周期の一員でした.

ほとんどの「例外」を除き $(F_k)^3$ で割ることのできる最小のフィボナッチ数は kF_k^2 番目である, という事実が面白いと思って出題しました. そしてその「例外」も規則性の範疇にあるというところも面白いですね.

> 無理かなと思いましたが (3) まで行きました. 一般化できそうですがなかなか難しそうです. これを機に心機一転がんばりたいと思います.

一般化には, 漸化式ではなくフィボナッチ数の一般項を用いるのが有効です. ヒントを載せておきましたので是非チャレンジしてください.

(なかむら ゆうすけ
東京大学理学部数学科 3 年)