問題コーナー

第 16 回

入江　慶

G

2008年 11月 10日出題
12月 10日締切
2009年 1月 7日解説

3 次元空間内の直線からなる集合 S であって, 次の 2 つの条件を両方ともみたすものが存在することを示せ：

- 空間内の任意の点 P について, P を通る S の元がただ 1 つ存在する.
- S のどの 2 元も互いに平行でない.

解説

第 16 回の問題を担当した入江です. 今回は 2 人の方からご応募をいただき, 大変ありがとうございました. まず解答を見てみましょう.

解答例 1

座標空間上で考える. 実数 a, b に対して, 点 $(a, b, 0)$ を通り $(b, -a, 1)$ を方向ベクトルとする直線を $l_{(a,b)}$ とする. このとき $S = \{l_{(a,b)}\}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ が条件をみたすことを示す.

まず, 空間内の任意の点 $P(x, y, z)$ について P を通る $l_{(a,b)}$ がただ 1 つ存在することを示す. これは, $l_{(a,b)}$ が P を通ることと

$$(a, b, 0) + t(b, -a, 1) = (x, y, z)$$

をみたす $t \in \mathbb{R}$ が存在することと同値であり, これを (a, b, t) について解くとただ 1 つの解

$$(a, b, t) = \left(\frac{x - yz}{1 + z^2}, \frac{xz + y}{1 + z^2}, z\right)$$

が得られることから分かる. S のどの異なる 2 元も互いに平行でないことは, $(a, b) \neq (a', b')$ のときベクトル $(b, -a, 1)$ と $(b', -a', 1)$ が平行でないことから明らかである.

今回正解したお 2 人は, どちらも上と同じ例を構成していました. 上の解答は dsk さんの解答に基づいたものです.

今回の問題は,「空間を直線に分割するのに, 自明な分け方（まず空間を平行な平面に分割し, 各々の平面を直線に分割する）以外のものがあるか？」という素朴な疑問に端を発したものです. 結果として得られた分け方は, なかなかきれいな形をしていますね.

おまけとして, 次のような観察をしておきます. 実数 4 つの連比 $(x:y:z:w)$ であって, $(0:0:0:0)$ でないもの全体の集合を 3 **次元実射影空間**といい, $P^3(\mathbb{R})$ と書きます. また, 1 次独立な斉次 1 次式 $f(x,y,z,w)=ax+by+cz+dw$, $g(x,y,z,w)=a'x+b'y+c'z+d'w$ を用いて

$$\bigl\{(x:y:z:w)\bigm| f(x,y,z,w)=g(x,y,z,w)=0\bigr\}$$

と表せる $P^3(\mathbb{R})$ の部分集合を**射影直線**といいます. ここで $f(x,y,z,w)$ 等の値は比 $(x:y:z:w)$ だけからは一般に決まらないわけですが, 0 であるか否かは比だけで決まることに注意しましょう.

写像 $\mathbb{R}^3\to P^3(\mathbb{R})$; $(x,y,z)\mapsto(x:y:z:1)$ により, $\mathbb{R}^3$ は $P^3(\mathbb{R})$ の部分集合と同一視することができます. この同一視のもとで, 上の解答で与えた直線 $l_{(a,b)}$ は $P^3(\mathbb{R})$ の部分集合

$$\bigl\{(a+tb:b-ta:t:1)\bigm| t\in\mathbb{R}\bigr\}$$

にうつります. これに 1 点 $(b:-a:1:0)$ を付け加えてやると, 射影直線

$$\bigl\{(x:y:z:w)\bigm| x-bz-aw=y+az-bw=0\bigr\}$$

が得られます. これを $S_{(a,b)}$ と書くことにします.

$P^3(\mathbb{R})$ の点 $(x:y:z:w)$ で $(z:w)\neq(0:0)$ を満たすものは, ちょうど 1 つの $S_{(a,b)}$ の上にあることがすぐ分かります. そこで射影直線 $S_\infty=\bigl\{(x:y:0:0)\bigm| x,y\in\mathbb{R}\bigr\}$ を考えてやると, 射影直線の集合 $\{S_{(a,b)}\}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\cup\{S_\infty\}$ は $P^3(\mathbb{R})$ の射影直線による分割を与えていることが分かります.

ここで $P^3(\mathbb{R})$ から単位球面 $S^2=\{(s,t,u)\mid s^2+t^2+u^2=1\}$ への写像 π を

$$\pi(x:y:z:w)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+w^2}\bigl(2(xw-yz),2(xz+yw),z^2+w^2-x^2-y^2\bigr)$$

で定めましょう（右辺の値は比 $(x:y:z:w)$ だけできまることに注意）. すると

$$S_{(a,b)}=\pi^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2+b^2},\frac{2b}{1+a^2+b^2},\frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}\right),\quad S_\infty=\pi^{-1}(0,0,-1)$$

となっていることが計算で分かります. つまり, 上で与えた分割は, $P^3(\mathbb{R})$ を π の各点の逆像へと分割するものだったわけです.

各射影直線は円周 $S^1=\left\{(s,t)\,\middle|\,s^2+t^2=1\right\}$ と「同じ形」をしているので, 上で考えた写像 $\pi\colon P^3(\mathbb{R})\to S^2$ を用いると, $P^3(\mathbb{R})$ は S^2 を土台として S^1 を「束ねた」ものと思うことができます. このことを位相幾何学の言葉を使って正確に表現すると,「3 つ組み $\left(P^3(\mathbb{R}),\pi,S^2\right)$ は S^1 を**ファイバー**とする**ファイバー束**である」となります. ファイバー束は位相幾何学の基本的な研究対象ですが, ファイバー束の正確な定義も含め, 位相幾何学の親しみやすい入門書として

佐藤肇, 位相幾何（岩波講座「現代数学の基礎」）, 岩波書店

をあげておきます.

感想欄より

少し考えたらすぐに分かりました.

適当に図を思い描いてこんな感じで構成すればうまくいくかも, ということで構成してみたらうまく行ったので何とか間に合いました.

けっこう難しいと思って出したのですが, うまく思いつけばあっさり解けてしまうようですね. 僕ははじめこのような S は存在しないのではないかと思っていたので, 解答に到達するまでにずいぶん時間がかかってしまいました.

（いりえ けい
東京大学理学部数学科４年）