問題コーナー

第 13 回

越川 皓永

A

2008年 7月10日出題
8月10日締切
9月20日解説

> 定数でない実数係数有理式 $f(x), g(x)$ であって，
> $$g(x)^2 = f(x)^3 - 4$$
> をみたすものは存在しないことを示せ.

解説

感想や応募者の数を見る限り，この問題は少し難しかったかもしれません.

早速証明にうつります．定数でない実数係数有理式 $f(x), g(x)$ が与式をみたすと仮定します．はじめのステップは有理式の分母を考察することです.

$f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}, g(x) = \dfrac{c(x)}{d(x)}$ と書けたとします．ただし，$a(x)$ と $b(x)$, $c(x)$ と $d(x)$ はそれぞれ互いに素な実数係数多項式とし，また $b(x)$ と $d(x)$ の最高次の係数は 1 とします.（このような形に書けることは簡単に分かります.）

これらを与式に代入し整理すると

$$c(x)^2b(x)^3 = \left(a(x)^3 - 4b(x)^3\right)d(x)^2$$

となりますが，$a(x)^3 - 4b(x)^3$ と $b(x)^3$ は互いに素なので $b(x)^3$ が $d(x)^2$ を割りきります．同様に $d(x)^2$ と $c(x)^2$ が互いに素であることから $d(x)^2$ が $b(x)^3$ を割りきります．$b(x)^3$ と $d(x)^2$ の最高次の係数は 1 であることから，結局これらは共にある実数係数多項式 $h(x)$ の 6 乗に等しくなります．このとき，$b(x) = h(x)^2$, $d(x) = h(x)^3$ です．$h(x)$ を代入し

$$c(x)^2 = a(x)^3 - 4h(x)^6$$

が得られます．ここで，$a(x), c(x), h(x)$ のどの二つも互いに素であることに注意します.（簡単なので考えてみて下さい.）

さて，次の一手が重要です．正解者は解の大きさを定義して，元の解よりも小さい解が存在することを因数分解や巧みな式変形などを用いて示し，矛盾を導いていました．しかし少々煩雑になるため，ここでは多項式や有理式は微分が出来るとい

うことに注目します.

◦○◯ **解答例**

実数係数多項式 $a(x), c(x), h(x)$ が $c(x)^2 = a(x)^3 - 4h(x)^6$ を満たし，どの二つも互いに素であるとする．$a(x), c(x), h(x)$ がすべて定数になることを示せばよい．どれか一つでも定数でないと仮定する．（このとき $h(x) \neq 0$ で $\dfrac{a(x)}{h(x)}, \dfrac{c(x)}{h(x)}$ は共に定数でない.）

両辺を $h(x)^6$ で割り，微分すると

$$2c(x)c'(x)h(x) - 6c(x)^2h'(x) = 3a(x)^2a'(x)h(x) - 6a(x)^3h'(x)$$

を得る．これを式変形し

$$\frac{c(x)^2}{a(x)^3} = \frac{3\frac{a'(x)}{a(x)} - 6\frac{h'(x)}{h(x)}}{2\frac{c'(x)}{c(x)} - 6\frac{h'(x)}{h(x)}} \tag{$*$}$$

とする．ただし，右辺の分母が 0 にならないことは仮定からわかる.（微分が 0 なら元の関数は定数.）

ここで，0 でない実数係数多項式 $\alpha(x)$ に対し実数係数多項式 $r\bigl(\alpha(x)\bigr)$ を次のように定める.

$\alpha(x)$ は実数 γ と最高次の係数が 1 の実数係数既約多項式 $\beta_i(x)$ および正の整数 e_i $(i = 1, \ldots, n)$ を使って $\alpha(x) = \gamma \prod_{i=1}^{n} \beta_i(x)^{e_i}$ と一意的に書ける．このとき，$r\bigl(\alpha(x)\bigr) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i(x)$ とする.

次の性質が成り立つ.

補題

（1）$\deg r\bigl(\alpha(x)\bigr) \leqq \deg \alpha(x)$.

（2）$r\bigl(\alpha(x)\bigr)\dfrac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}$ は実数係数多項式になり，その次数は $\deg r\bigl(\alpha(x)\bigr)$ 未満.

（3）$\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ が互いに素なとき

$$r\bigl(\alpha_1(x)\alpha_2(x)\bigr) = r\bigl(\alpha_1(x)\bigr)r\bigl(\alpha_2(x)\bigr)$$

となる.

証明　いずれも定義より容易に導かれる.（(2) で積の微分法を用いることと

$\alpha(x)$ が定数の場合のときに注意.）■

問題の証明に戻る．(∗) の右辺の分母と分子に $r\big(a(x)c(x)h(x)\big) = r\big(a(x)\big)r\big(c(x)\big)r\big(h(x)\big)$ を掛ける．補題より分母と分子は共に実数係数多項式となる.

一方，左辺はこれ以上約分されない．したがって，次数を比べることで

$$\begin{aligned}2\deg c(x) = \deg c(x)^2 &\leqq \deg r\big(a(x)c(x)h(x)\big) - 1\\ &= \deg r\big(a(x)\big) + \deg r\big(c(x)\big) + \deg r\big(h(x)\big) - 1\\ &\leqq \deg a(x) + \deg c(x) + \deg h(x) - 1\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}3\deg a(x) = \deg a(x)^3 &\leqq \deg r\big(a(x)c(x)h(x)\big) - 1\\ &\leqq \deg a(x) + \deg c(x) + \deg h(x) - 1\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}6\deg h(x) = \deg h(x)^6 &\leqq \max\big(3\deg a(x), 2\deg c(x)\big)\\ &\leqq \deg a(x) + \deg c(x) + \deg h(x) - 1\end{aligned}$$

これらより

$$6\deg a(x) + 6\deg c(x) + 6\deg h(x) \leqq 6\big(\deg a(x) + \deg c(x) + \deg h(x) - 1\big)$$

となり，矛盾.

今回の問題には関連した話題がいくつかあります．次の定理は解答例と同様にして示すことができます.

定理　$a(x), b(x), c(x)$ をどの二つも互いに素な定数でない実数係数多項式とし $a(x) + b(x) = c(x)$ が成り立っているとする．このとき次が成り立つ.

$$\max(\deg a(x), \deg b(x), \deg c(x)) \leqq \deg r\big(a(x)b(x)c(x)\big) - 1$$

この定理は整数論の abc 予想の多項式版となっています．今回の問題への使い方を真似すれば，多項式版のフェルマーの最終定理を示すこともできます．偶然にも今年度の JMO 夏季セミナーで山崎隆雄先生がこの話題について講義され，非常に参考になったことを述べておきます.

また知識のある方はすぐに気づいたと思いますが，今回の問題は楕円曲線とよばれるものの有理式版となっています．その方面からもう少し現代的なアプローチをして示すことも出来るようです．

感想欄より

実係数だと，整式の自乗同士の和の最高次の項が打ち消し合わない，というのが問題が実係数になっていることの意味だとは思いますが，かと言って複素係数の反例も思い浮びませんでした．

実は複素数係数でも成り立ちます．解答例の議論をすべて複素数に対応する形に替えてもうまくいくのです．（複素数係数での既約多項式は一次式だけになるなど，一見様子は異なりますが．）

さらにいってしまえば，実数や複素数の満たす条件を一般化した集合（例えば，標数 0 の体）を係数として考えてもうまくいくこともわかります．興味を持った方はこの機会に環や体という言葉をぜひ調べてみてください．

（こしかわ てるひさ
東京大学理科一類 1 年）